



## ARTÍCULO

# Propagación del oleaje y asimilación de datos satelitales en un modelo espectral de tercera generación

## Swell propagation and assimilation of satellite data in a third generation spectral model

Fecha recepción: 2007-09-13 / Fecha aceptación: 2007-10-18

**Serguei Lonin**, slonin@costa.net.co

Grupo de Investigación en Oceanología, Escuela Naval de Cadetes "Almirante Padilla";  
Centro de Investigaciones Oceanográficas e Hidrográficas CIOH, Isla Manzanillo,  
Cartagena de Indias, D. T. y C.

**Ricardo Torres**, rtorres@cioh.org.co

Centro de Investigaciones Oceanográficas e Hidrográficas CIOH, Isla Manzanillo,  
Cartagena de Indias, D. T. y C.

**Iryna Lonina**, oceanmet.ltda@yahoo.com  
Oceanmet Ltda.;

Centro de Investigaciones Oceanográficas e Hidrográficas CIOH, Isla Manzanillo,  
Cartagena de Indias, D. T. y C.

## Resumen

En la predicción del oleaje en el Mar Caribe, dos mejoras pueden aumentar la precisión del modelo: el perfeccionamiento del esquema numérico de transporte del espectro de olas y la asimilación adecuada de los datos provenientes de las plataformas satelitales. La primera mejora minimiza el error de propagación de olas de viento a lo largo del fetch y aumenta la exactitud de cálculo de olas de mar de fondo (swell). En el trabajo se analizan varios esquemas numéricos, tales como Lax-Vendroff, FCT, TVD, "upward" de primer orden de aproximación y un esquema no central de tercer orden. A pesar de que los esquemas positivos de tipo TVD conservan mejor la forma inicial de las perturbaciones, la mayor exactitud de conservación integral del espectro fue encontrada con el esquema de tercer orden. Luego de la implementación de este algoritmo mejorado, se propone una metodología no tradicional de asimilación de datos del oleaje de las órbitas satelitales de JASON-1. La metodología se basa en la teoría de perturbaciones pequeñas para un funcional que minimiza el error cuadrático del modelo, corrigiendo unas constantes responsables por los procesos físicos de generación, disipación y la transformación no-lineal del espectro.

**Palabras claves:** Modelo espectral del oleaje, asimilación de datos, esquemas numéricos de transporte.

## Abstract

In wave forecasting in the Caribbean, two ways to improve enhancing of model accuracy are possible: improvement of the numerical scheme of transport of the wave spectrum, and an appropriate assimilation of the data obtained from the satellite platforms. The former minimizes the wind wave propagation error along the fetch and increases the swell estimate accuracy. Several numerical schemes are analyzed, such as Lax-Vendroff, FCT, TVD, "upward" of the first order of approximation and a non-central scheme of the third order. Despite the fact that the type TVD positive schemes, keep the initial form of perturbations best, the greater accuracy in the

integral spectrum conservation was found by using the scheme of the third order. After the implementation of that algorithm, a non-traditional methodology is proposed to assimilate data from the JASON-1 orbits. The methodology is based on the small perturbations theory for a functional which minimizes the model mean square error, correcting some constants responsible for physical processes description of generation, dissipation and non-linear spectral transformation

**Key words:** Spectral wave model, data assimilation, numerical scheme of transport.

## Introducción

La descripción de los campos de oleaje y su pronóstico depende de la exactitud con que se conocen los campos de viento en el presente y futuro, así como de la profundidad física del modelo empleado y la calidad de su realización numérica. La física de los modelos espectrales de tercera generación (WAM [1], WAVEWATCH-III [2], SWAN [3]) es bastante completa en la descripción de los mecanismos de generación, disipación y transformaciones no lineales de los espectros de olas. La realización numérica se refiere a una variedad de esquemas que garantizan el transporte del espectro con poca difusión y dispersión numérica [4], con esquemas positivos [5], conservativos y minimizando el fenómeno de GSE [6] para las olas de mar de fondo (desde aquí y en adelante se utilizará el término inglés *swell* para este tipo del oleaje).

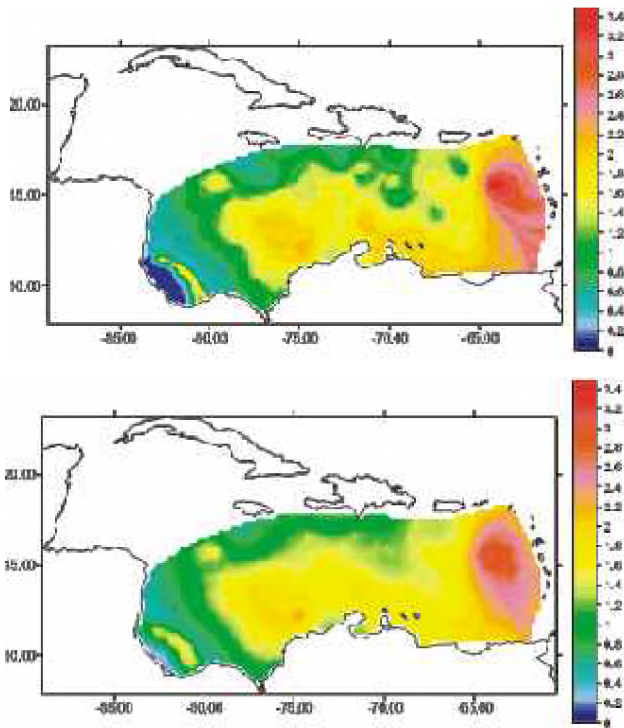
En aguas profundas, donde la ola no experimenta la influencia del fondo, la exactitud del pronóstico puede ser mejorada a través de la asimilación de la información disponible, ingresada en el tiempo *cuasi-real*. Varios ejemplos y métodos de asimilación de datos en los modelos de oleaje se presentan en [7-10]. En áreas limitadas, como es el caso del Mar Caribe, la asimilación directa de la altura de ola tendrá una aplicación poco eficiente, debido a que afectará solamente las direcciones en las que se propaga el espectro, mientras que las velocidades de grupo altas (del orden de la velocidad del viento) y el retraso para acceder a los datos (unas horas después de ser medidos), hará que la actualización de las zonas

influenciadas por la asimilación, ya no se encuentren en el dominio de cálculo, limitado por las costas y las fronteras abiertas. Bajo estas circunstancias y considerando las causas que pueden afectar la exactitud de la predicción de los campos de olas, se necesita buscar otras formas (métodos) de asimilación de la información de campo que sean más eficientes.

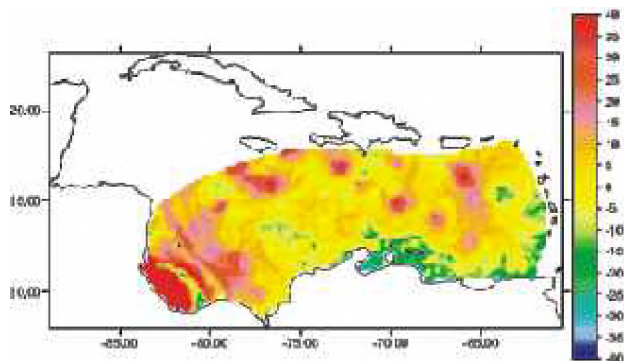
En el trabajo de Lonin & López [11] se encontró que el modelo UKMO (*United Kingdom Meteorological Office*) subestima la intensidad de los vientos sobre el Mar Caribe en un 30%, siendo esta la principal causa del error en el cálculo de oleaje. Minimizar la causa, obviamente, es mejor que corregir las consecuencias a través de la asimilación de los parámetros del oleaje. La implementación del modelo WRF [12] en el CIOH (Proyecto SPOA) persigue precisamente esta idea, tratando de mejorar la resolución y la física en la parte de predicción meteorológica para poder emplear los campos de viento más exactos en el pronóstico del oleaje.

Reducir hasta un límite aceptable el error de cálculo de los campos de oleaje es el principal objetivo de este artículo, abarcando los dos frentes de posible error: 1) el transporte del espectro de olas en el espacio y 2) las correcciones relacionadas con la imprecisión de los datos de entrada y con las imperfecciones de la propia física del modelo.

En este trabajo se utiliza el modelo NedWAM (versión del CIOH [13]). La figura 1 muestra el cálculo de la altura de las olas con la advección del espectro y sin ella (aplicando artificialmente la celeridad de las olas igual a cero, es decir, las olas evolucionan localmente); en la figura 2 se presentan las diferencias que demuestran la importancia del transporte, básicamente de las olas de *swell* (de hecho, el transporte de cualquier componente de olas en un campo no homogéneo de vientos puede considerarse como *swell*). Desde la figura 2 se observa que con el esquema simple “*upwind*” la advección contribuye un 20-40% en promedio de la intensidad del espectro para las condiciones del Mar Caribe en ausencia de ciclones tropicales u otros fenómenos locales extremos.



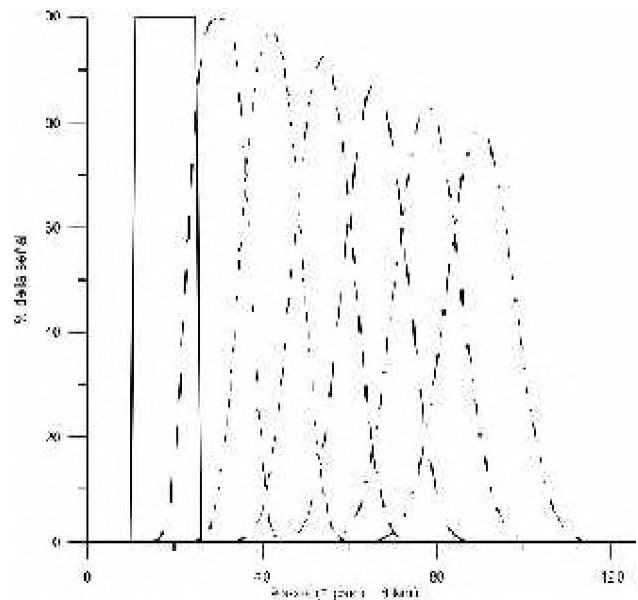
**Figura 1.** Altura de la ola sin (arriba) y con (abajo) la advección del espectro en el espacio. La advección “suaviza” el campo. Esquema “upwind” aplicado.



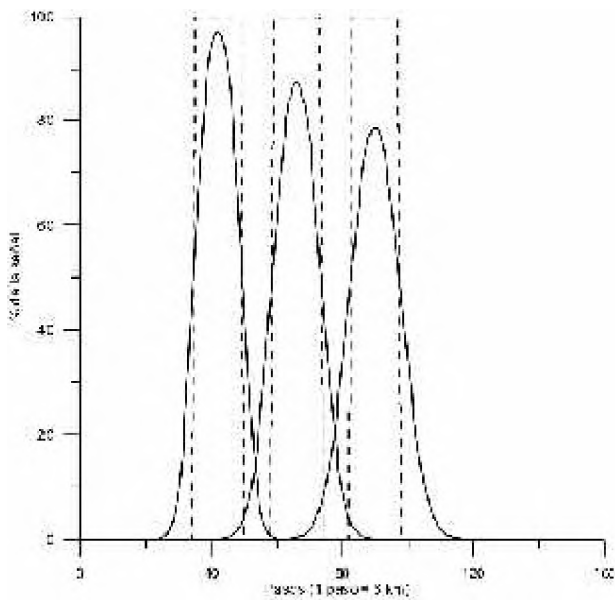
**Figura 2.** Diferencias (con advección - sin advección) relativas (en %) de la altura de ola en el experimento anterior.

Las mejoras en los esquemas de transporte empleados en el modelo, podrían entonces reducir el error total del modelo. En el trabajo [13] fueron empleados los esquemas de tipo “upward” de orden  $O(1)$ , observados en las figuras 3 y 4, los cuales junto con el esquema FCT (*Flux Corrected Transport*, [14]),

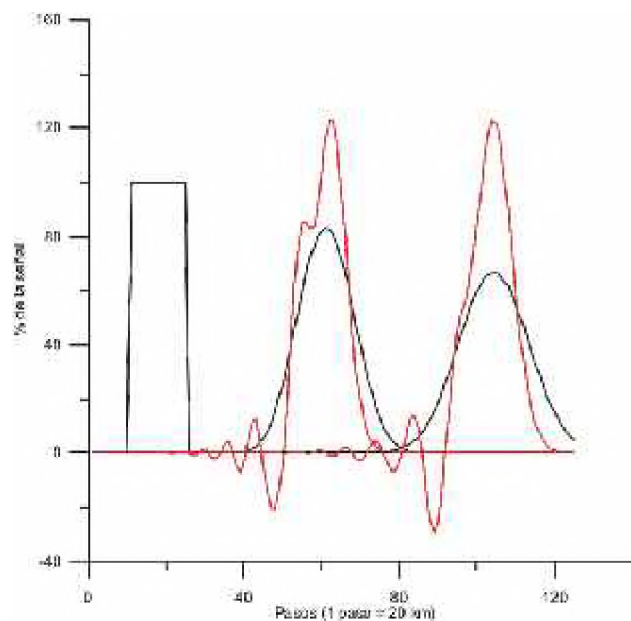
basado en la aproximación de Lax-Vendroff y el esquema TVD (*Total Variation Diminishing* [15]), figuras 5 y 6, son esquemas centrales que generan oscilaciones parásitas para el transporte con números de Reynolds de la malla por encima del valor de 2, mientras que el esquema asimétrico “upward”, hasta el momento empleado en el modelo NedWAM del CIOH, es de primer orden de aproximación y contiene una difusión artificial alta. De los esquemas “positivos” [5] parece que los TVD son racionales y prácticos desde el punto de vista de su realización y desempeño computacional, pero tanto en el trabajo [13], como en la figura 5 del presente, se observa una subestimación de la velocidad de propagación del impulso inicial, con un retraso significativo (alrededor de 23%) con respecto a la velocidad verdadera de transporte. Evidentemente, este fenómeno se debe a la selección de los limitantes del flujo de transporte, precisamente aquellos, que hacen que el esquema sea “positivo” (o “transportativo” [16]).



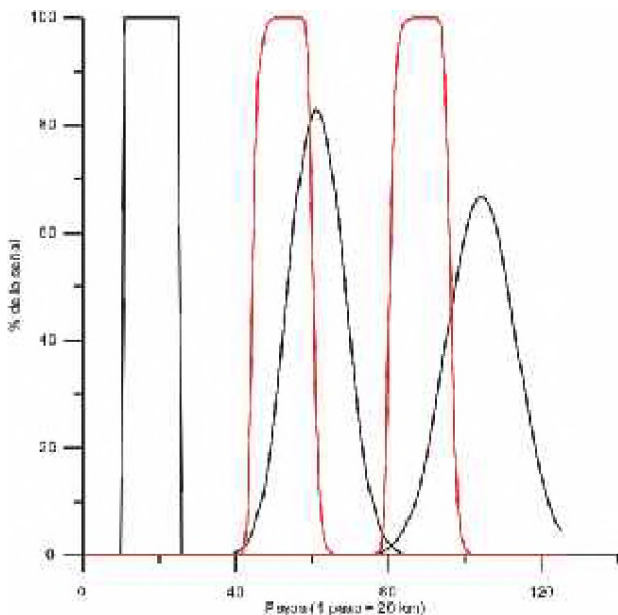
**Figura 3.** Propagación de una forma en el espacio (línea continua es el perfil inicial) con el esquema “upwind” de  $O(1)$  para distintos momentos de tiempo (cada 4 horas). Velocidad de propagación = 5 m/s (corresponde a una ola con el período de 6 seg, aprox.). Se observa que a las 24 horas (perfil final a la derecha), pierde un 20% de la magnitud del pico. El integral se conserva.



**Figura 4.** Propagación con la velocidad de 5 m/s (líneas continuas corresponden al caso anterior, figura 3) y con 10 m/s (solución exacta,  $Cr = 1$ ).



**Figura 6.** El esquema “upwind” (negro) vs. Lax-Vendroff (rojo). Se observan las propiedades no monótonas del último (una cola “parásita” detrás de la forma propagada).



**Figura 5.** Propagación con el esquema “upwind” (contornos negros) con  $V = 10$  m/s durante 24 y 48 horas respectivamente y la representación correspondiente con el esquema TVD (contornos rojos). Se observa la mejor conservación de la forma original de la señal, reproducida por el esquema TVD, pero con el limitante sugerido por Roe [17] la propagación es más lenta que en la realidad (subestimación de la velocidad de propagación de un 23%). El efecto fue observado en [13].

Por lo anterior, en la primera parte de este trabajo se busca mejorar los esquemas numéricos de transporte. Una vez mejorado el modelo numéricamente, la segunda parte de trabajo se dedica al desarrollo de un método de asimilación de la información satelital, pero no en forma tradicional de corrección de los parámetros de olas observadas *in situ* o con los sensores remotos, sino, ajustando ciertas constantes y minimizando el error cuadrático entre las observaciones y el cálculo. El concepto de asimilación que se propone se basa en lo siguiente: Existen errores de la información de entrada (campos de vientos) y el mismo modelo genera otros errores. Los numéricos se minimizan con las mejoras en sus algoritmos discretos. Otros errores del modelo generalmente se relacionan con la física de procesos y la forma de su descripción. Sin dividir la naturaleza de los errores entre los de entrada (externos) y los producidos por el núcleo del modelo (internos), se introducen unas constantes ante los términos principales de generación, disipación y las interacciones no-lineales y se aplica el método de perturbaciones pequeñas [18], optimizando los valores de estas constantes.

Debido a que el enfoque del método de asimilación no es tradicional, en la descripción de la metodología, no se detalla el uso de métodos de interpolación entre los nodos del modelo y los puntos del satélite, es decir, no se discute la forma del operador de observaciones, utilizándose la interpolación de distancias inversas de los cuatro nodos del modelo más cercanos a cada punto satelital.

En el próximo capítulo se presenta una breve descripción de datos utilizados de las plataformas satelitales; la metodología está dividida en dos partes: 1) las mejoras en los esquemas numéricos y 2) la asimilación de datos. Luego se presentan resultados referentes a cada uno de estos temas y se discuten posibles avances en su desarrollo hacia futuros trabajos de investigación.

## Datos de sensores remotos

Se utilizó la información del Satélite JASON-1, el cual orbita desde el 7 de diciembre de 2001 en una misión conducida en conjunto por la Agencia Espacial Francesa (*Centre National d'Etudes Spatiales* CNES) y la Administración Espacial y Aeronáutica de los Estados Unidos (*National Aeronautics and Space Administration* - NASA), continuando con las mediciones de oleaje y la anomalía del nivel del mar de su antecesor el TOPEX/POSEIDON.

En el artículo se utilizó información de altura de la ola del paso 039 del ciclo 202, el cual efectuó mediciones en el Mar Caribe el 2 de julio de 2007, empleando los archivos OSD R (*Operational Sensor Data Record*), los cuales están disponibles con un atraso de 3 a 5 horas, con el fin de ser utilizados en la asimilación de datos en centros de pronósticos de manera operacional. Estos archivos fueron procesados siguiendo la metodología propuesta por Torres & Lonin en [19].

Se cuenta adicionalmente con una red de boyas de oleaje direccional en construcción por la Dirección General Marítima de Colombia en el Caribe. La red provee de información espectral en tiempo real como fue descrito por Torres & Lonin en [20], lo cual brinda información muy completa y de calidad; dicha información, por las limitaciones en cobertura y permanencia, servirá para la validación de las técnicas de asimilación de datos satelitales, los cuales cuentan

con mayor cobertura con 16 pases en el dominio del modelo por ciclo (el cual se repite aproximadamente cada 10 días) y disponibilidad de los datos con un tiempo máximo entre los pases sobre el Caribe de 24.36 horas. Existe gran confiabilidad en la continuidad de las mediciones del satélite.

## Metodología

### Esquemas numéricos de transporte

Para una propiedad  $S$  del campo de dos dimensiones  $(x, y)$ , su propagación en el tiempo  $t$  con las respectivas componentes de velocidad  $u$  y  $v$ , se define como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

prototipo de la ecuación que es empleada en el modelo que estamos discutiendo en la segunda parte de la metodología.

Introduciendo el espacio discreto  $(x_i, y_j, t_k)$ , donde  $i = 1, \dots, M$ ;  $j = 1, \dots, N$ ;  $k = 1, \dots, K$  con los respectivos pasos espaciales  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y del tiempo  $\Delta t$ , la discretización de (1.1) más simple posible es de primer orden  $O(1)$  [en este caso tanto en el tiempo, como en el espacio]:

$$S_{i,j}^{k+1} = S_{i,j}^k - Cr_x(S_{i,j}^k - S_{i-1,j}^k) - Cr_y(S_{i,j}^k - S_{i,j-1}^k), \quad (1.2)$$

donde  $Cr_x = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ ;  $Cr_y = \frac{v\Delta t}{\Delta y}$  son números de Courant en las respectivas direcciones  $x$  e  $y$ .

La ecuación (1.2) es el esquema explícito de “flujo arriba” (“upward”), cuya solución exacta es posible presentar cuando  $Cr_x = 1$ ,  $Cr_y = 0$ , ó  $Cr_x = 0$ ,  $Cr_y = 1$ . Para garantizar la estabilidad numérica,  $Cr_x, Cr_y \leq 1$ . Este esquema tiene una difusión artificial fuerte (figuras 3 y 4) y fue aplicado en el modelo NedWAM, implementado en el CIOH [13].

Para disminuir el efecto de la viscosidad artificial, se requiere la aplicación de un esquema de mayor orden de aproximación en el espacio. Los esquemas centrales de tres puntos, tipo Lax-Vendroff (figura 6), con el orden  $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$ , mejoran esta condición, pero no son “transportativos”, es decir, en los gradientes abruptos de solución se pueden producir oscilaciones

parásitas, vistas en la introducción en la figura 6. De hecho, cualquier esquema de diferencias centrales está sujeto a este tipo de comportamiento y para evitarlo, se requiere aplicar un esquema de mayor orden de aproximación con diferencias no centrales, introducir una difusión al modelo o cumplir con las condiciones de un esquema “positivo” [21], como es el caso de un esquema TVD (figura 5).

De hecho, un esquema TVD fue empleado también en [13] y, a pesar de conservar la forma de la perturbación inicial, tuvo una subestimación de la velocidad de transporte, obviamente relacionada con la forma del limitante que se aplicó para corregir el transporte de la propiedad entre las celdas de la malla. Aquí, se van a considerar dos formas distintas de aproximación de la ecuación (1.1): la primera basada en uno de los esquemas TVD distintos de lo anterior y la segunda en el uso de un esquema no central de orden  $O(\Delta x^3, \Delta y^3)$ .

Un esquema TVD puede ser obtenido desde (1.1) aplicando una corrección de flujos entre los nodos en la manera

$$S_{i,j}^{k+1} = S_{i,j}^k - Cr_x(S_{i,j}^k - S_{i-1,j}^k) - Cr_y(S_{i,j}^k - S_{i,j-1}^k) - (f_{i+1/2}^k - f_{i-1/2}^k)_j - (g_{j+1/2}^k - g_{j-1/2}^k)_i, \quad (1.3)$$

donde  $f$  y  $g$  son flujos de la propiedad  $S$  entre los nodos, definidos como

$$f_{i+1/2} = \phi(r_i) [0.5Cr_x(1 - Cr_x)](S_{i+1} - S_i). \text{ (Análogicamente los demás términos).}$$

Aquí,  $r_i = (S_i - S_{i-1})(S_{i+1} - S_i)^{-1}$ , es la razón de gradientes adyacentes y  $\phi(r)$  es el limitante.

En el caso dado, si  $\phi(r) = 1, \forall r$ , entonces (1.3) corresponde al esquema de Lax-Vendroff. En el trabajo de Roe [17], para los esquemas de segundo orden de aproximación, fue propuesto utilizar

$$\phi(r) = \begin{cases} \min(2, r), & r > 1, \\ \min(2r, 1), & 0 < r \leq 1, \\ 0, & r \leq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

El limitante (1.4) fue especificado para graficar la figura 5, lo que estimuló la búsqueda de otra expresión para el  $\phi(r)$ .

Un esquema es TVD cuando se satisfacen, según [5], los siguientes criterios:

$$0 \leq \phi(r) \leq 2/(1-Cr); \quad 0 \leq \phi(r) \leq 2/Cr, \quad \forall k. \quad (1.5)$$

En el siguiente apartado se presentan los resultados correspondientes a los casos de definición de  $\phi(r)$  en la siguiente forma:

$$\phi(r) = \max[0, \min(1, r)], \quad (1.6)$$

propuesta por los autores y

$$\phi(r) = \frac{r_{i+1/2} + |r_{i+1/2}|}{1 + |r_{i+1/2}|}, \quad (1.7)$$

propuesta por van Leer en [22].

El otro esquema numérico, es de orden  $O(3)$  por las derivadas espaciales las cuales son aproximadas con un polinomio no central con respecto al punto  $i, j$  [4], lo que en resumen, para el caso 1D(x) se presenta como:

$$S_i^{k+1} = S_i^k - \frac{1}{2} Cr_x \left\{ \begin{array}{l} \max(0, \text{sign}(u)) \left[ \frac{2}{3} S_{i+1}^k + S_i^k - 2S_{i-1}^k + \frac{1}{3} S_{i-2}^k \right] \\ - \min(0, \text{sign}(u)) \left[ 2S_{i+1}^k - \frac{1}{3} S_{i+2}^k - S_i^k - \frac{2}{3} S_{i-1}^k \right] \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

### Asimilación de datos

En el dominio  $\Omega \subset \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$  de coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  con la frontera  $\partial\Omega$  suficientemente suave y en el período del tiempo  $t \in [0, T]$  definimos el siguiente problema de transporte del espectro  $S(x, y, t, \omega, \theta)$ :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + C_x \frac{\partial S}{\partial x} + C_y \frac{\partial S}{\partial y} = G_{in} - D \pm NL, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.2)$$

$$S(t=0) = 0, \quad (2.3)$$

donde  $C_x$  y  $C_y$  son respectivas velocidades de grupo en proyección a los ejes de coordenadas;  $G_{in}$  corresponde a la entrada de energía por acción del viento;  $D$  es la disipación de energía y  $NL$  es el término de interacciones no-lineales en el espectro con

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} NL d\theta d\omega = 0.$$

En (2.1) se asumió que la frecuencia no varía debido a las corrientes y cambio de profundidad, así que es una aproximación para aguas profundas. Las coordenadas cartesianas fueron seleccionadas solamente por la comodidad de demostración del método, mientras que el modelo se emplea en todo el Mar Caribe en coordenadas esféricas. En (2.2) se asume que no hay *swell* entrante en el contorno  $\partial\Omega$  y que la ola saliente tiene una velocidad infinita. La condición inicial (2.3) implica el “arranque frío”, pero, sin pérdida de generalidad, se podría aplicar un espectro inicial desde un cálculo previo o un espectro analítico como el espectro JONSWAP propuesto en [23].

El problema (2.1)-(2.3) se llama el *problema directo* y la ecuación (2.1) se puede reformular simbólicamente en la siguiente forma:

$$LS = f, \tag{2.1'}$$

donde en  $f$  se encuentran todos los términos de la parte derecha de (2.1) y el operador  $L$  se define como

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + C_x \frac{\partial}{\partial x} + C_y \frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.4}$$

Los términos  $G_m$ ,  $D$  y  $NL$ , como regla, dependen de unas constantes (factores de proporcionalidad) y nosotros asumimos que la diferencia entre el estado verdadero y el simulado se debe a la variación de estas constantes, es decir, cargamos todas las inexactitudes de cálculo del espectro de oleaje a las imperfecciones en la definición física de estos términos y a los errores sistemáticos de especificación de campos de viento, provenientes usualmente de un modelo atmosférico con una resolución finita y con ciertas imperfecciones físicas también. En otras palabras, asumimos que

$$f = c_1 G_m - c_2 D \pm c_3 NL \tag{2.5}$$

y los valores no perturbados de las constantes  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ .

Aunque se desconoce el estado verdadero, debido a que las observaciones tienen errores, se va a considerar el caso en que el error de las observaciones es mucho menor que el error del modelo sin asimilación de datos (estado denominado “background”) y, por lo tanto, asumimos que el estado verdadero se encuentra muy cercano a lo observado, lo que es válido en caso de los sensores

remotos de las plataformas de los altímetros satelitales.

Se va a construir un problema conjugado y con base en la teoría de perturbaciones pequeñas, se hallarán los valores óptimos de las constantes en (2.5), cuando la diferencia entre los campos de oleaje calculados y observados sea la mínima posible.

Según [18], se define la multiplicación escalar de dos funciones  $g$  y  $h$  en el espacio de Hilbert en la siguiente forma:

$$(g, h) = \int_0^T \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} gh d\theta d\omega dt d\Omega, \tag{2.6}$$

de donde se introduce la norma cuadrática  $\|g\|_2 = (g, g)$ .

Se aplica la igualdad de Lagrange para el operador (2.4)

$$(S^*, LS) = (S, L^* S^*) = J \tag{2.7}$$

con una función  $S^*$  conjugada a  $S$ . La expresión (2.7) tiene el sentido de un funcional  $J$ , el cual más adelante vamos a poner en dependencia de los valores de las constantes en (2.5). Es obvio que la forma dual de (2.7) es

$$(S^*, f) = (S, p) = J, \tag{2.8}$$

si asumimos que existe un problema conjugado a (2.1)-(2.3) en forma

$$L^* S^* = p, \tag{2.9}$$

$$\left. \frac{\partial S^*}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.10}$$

$$S^*(t=T) = 0. \tag{2.11}$$

Desde (2.7) se puede hallar que el operador conjugado

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - C_x \frac{\partial}{\partial x} - C_y \frac{\partial}{\partial y} \tag{2.12}$$

y el problema (2.9)-(2.11) debe solucionarse en el tiempo regresivo en el intervalo  $t \in [T, 0]$ . Por lo tanto, a este problema se le va a llamar el *problema inverso*.

Ahora se va a buscar el sentido físico del funcional  $J$  a través de la igualdad derecha en (2.8), empleando varias formas de la función de manejo  $p$ . Por ejemplo,

si tenemos un único punto  $(x_0, y_0)$  de mediciones de oleaje durante un período  $T$  y empleamos

$$p = \frac{\omega^{-1}}{T} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad I = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty S(\omega, \theta) d\omega d\theta,$$

entonces,  $J = (S, p) = \int_\Omega d\Omega \int_0^T dt \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty d\omega \frac{S\omega^{-1}}{T} = \overline{\tau_p(x_0, y_0)^T}$  es el período de pico del espectro promedio en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  en el punto de observaciones, debido a la definición del período:

$$\tau_p = \frac{2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \omega^{-1} S(\omega, \theta) d\omega d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty S(\omega, \theta) d\omega d\theta}.$$

(Arriba, con la función  $\delta(x)$  se introduce la función “delta” de Dirac; más adelante, el símbolo  $\delta$  (no función!) se empleará para definir las variaciones finitas).

Si, en calidad de otro ejemplo, definimos  $p = \frac{1}{T} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ , entonces, el funcional  $J = (S, p) \cong \overline{H_s^2(x_0, y_0)^T}$  es el cuadrado de la altura significativa  $H_s$  de la ola, promediado durante el período  $T$  del tiempo en el punto de observación.

Nos interesan las mediciones “instantáneas” a lo largo de una órbita satelital, así que podemos aplicar

$$p = \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) \delta(t - t_0) \quad (2.13)$$

para un instante  $t_0$  en los puntos  $1 \leq k \leq N$ , donde  $N$  es la cantidad de puntos de mediciones del satélite a lo largo de una órbita.

Recordamos que  $H_s = \gamma \left( \int_0^{2\pi} \int_0^\infty S(\omega, \theta) d\omega d\theta \right)^{1/2}$  con el valor  $\gamma = 4$ . Con la definición (2.13) el funcional

$$J = (S, p) = \gamma^{-2} N^{-1} \sum_{k=1}^N H_s^2(x_k, y_k, t_0). \quad (2.14)$$

Nos va a interesar la variación del funcional, dependiendo de las perturbaciones pequeñas  $\delta c_i$  de las constantes  $c_i$  en (2.5). Las perturbaciones pequeñas significan que  $|\delta c_i| \ll 1, \forall i$ . Asumimos que sólo estas constantes varían y se evitan las perturbaciones en las condiciones iniciales o de contorno.

En éste y sólo en este caso, la variación del funcional será definida como

$$\begin{aligned} \delta J = (S^*, \delta f) = (S^*, \delta c_i f_1) &= \int_\Omega d\Omega \int_0^T dt \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty d\omega S^* \delta c_i f_1 = \\ &= \frac{1}{\gamma^2 N} \sum_{k=1}^N \delta(H_s)^2 \Big|_{x_k, y_k, t_0} = \frac{2}{\gamma^2 N} \sum_{k=1}^N H_s \delta H_s \Big|_{x_k, y_k, t_0} \approx \\ &= \frac{2}{\gamma^2 N} \sum_{k=1}^N H_{\text{mod}} (H_{\text{obs}} - H_{\text{mod}}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Aquí  $f_1$  implica que el valor  $f$  fue tomado en (2.5) con  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ ;  $H_{\text{mod}}$  representa la altura significativa  $H_s$  determinada por el modelo como la “primera adivinanza” (“first guess”) y  $H_{\text{obs}}$  corresponden a las observaciones. Tanto  $H_{\text{mod}}$  como  $H_{\text{obs}}$  se toman en los puntos de observaciones  $(x_k, y_k)$  en el momento del tiempo  $t_0$ . Para hallar la última expresión en (2.15) se utilizó el hecho de que las perturbaciones son pequeñas, entonces, para  $H_s = H_{\text{mod}} + \delta H$  siempre tenemos  $|\delta H| \ll H_{\text{mod}}$ . En otras palabras, se desprecian los términos cuadráticos de las perturbaciones.

Desde (2.15), asumiendo el caso cuando  $\delta c_1 = \delta c_2 = \delta c_3$ , finalmente se pueden encontrar las correcciones a las constantes

$$\delta c_i = \frac{2 \sum_{k=1}^N H_{\text{mod}} (H_{\text{obs}} - H_{\text{mod}})}{\gamma^2 N \int_\Omega d\Omega \int_0^T dt \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty d\omega S^* f_1}. \quad (2.16)$$

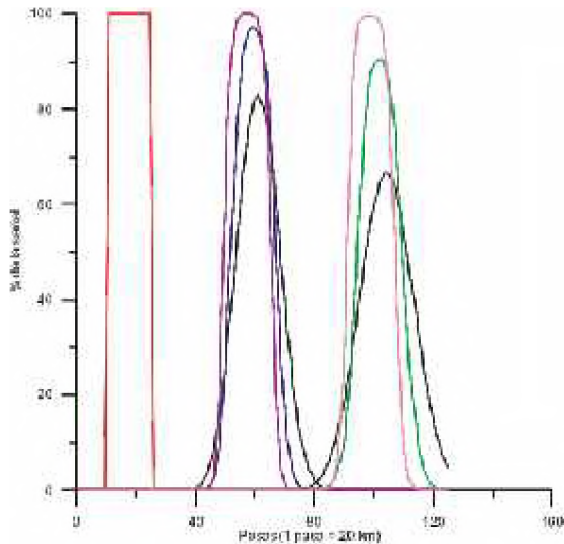
Los valores corregidos  $c_i = 1 + \delta c_i$ . Con estos últimos, nuevamente se arranca el problema directo.

Resumiendo el procedimiento, señalamos que para completar la tarea de asimilación de datos en esta metodología, se requiere hacer los tres siguientes pasos: 1) correr el problema directo (2.1)-(2.3) no perturbado y encontrar  $H_{\text{mod}}$  en los puntos de observaciones y  $f_1$  en todo el dominio  $\Omega$ ; 2) correr en el tiempo hacia atrás, el problema inverso (2.9)-(2.11), para hallar el campo de la función conjugada  $S^*$ , especificando la parte derecha de (2.9) en forma (2.13); 3) definir con (2.16) las perturbaciones de las constantes y emplear por segunda vez el modelo directo.



## Resultados

La figura 7 muestra los resultados de la propagación de una perturbación inicial “difícil”, empleando los esquemas TVD, según las fórmulas (1.6) y (1.7) en comparación con la (1.2). Se observa que el efecto de retraso, encontrado en la figura 5, se redujo significativamente: para el lapso de tiempo de propagación de 24 horas el esquema (1.6) produce un retraso equivalente a 8.1%, mientras que el esquema (1.7) tiene solamente un 2.3%. Sin embargo, el primer esquema conserva mejor la forma inicial de la perturbación. Ambos muestran la propiedad monótona, es decir, son positivos.



**Figura 7.** La perturbación inicial (rojo), el esquema “upward” (negro) versus los esquemas TVD modificados: las curvas moradas corresponden a la fórmula (1.6) para 24 y 48 horas después del inicio de transporte; las curvas azul y verde corresponden a la fórmula (1.7) para los respectivos momentos de tiempo.

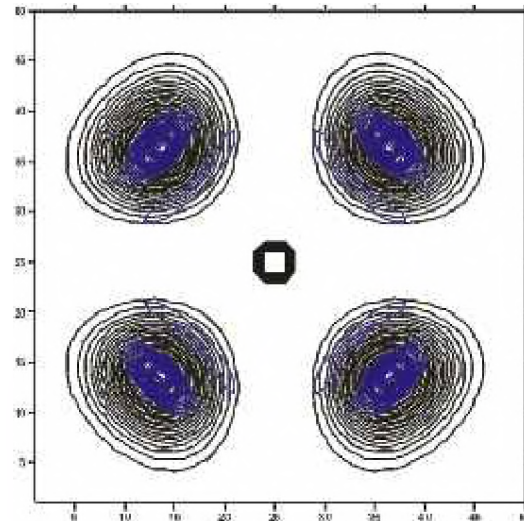
La tabla 1 verifica la propiedad de conservación en los esquemas analizados. Resulta que ninguno de los esquemas TVD, considerados en el presente estudio, conserva la propiedad transportada a pesar de que son suficientemente satisfactorios desde el punto de vista de transportar la forma. Hay que tener en cuenta que el campo del espectro de olas (para cada componente direccional y de frecuencia) es mucho más homogéneo que la perturbación inicial “difícil”, tomada en este estudio. Así que los criterios de selección del esquema final para su empleo en el

modelo, probablemente deban combinar las características de conservación integral de la propiedad transportada y la forma, sacrificando tal vez, en cierta medida, las ventajas de los esquemas TVD.

**Tabla 1.** Conservación de propiedades en los esquemas. El valor inicial integral de la propiedad es 1.500 unidades.

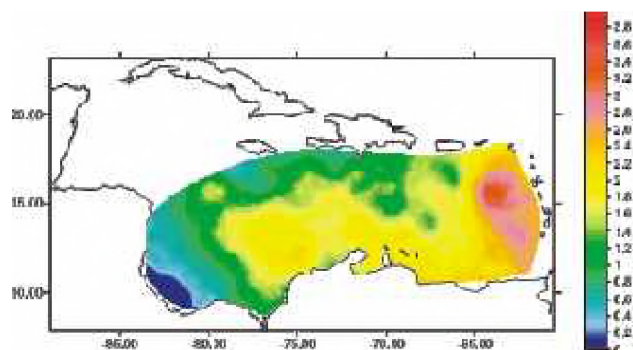
Fórmula	24 horas	48 horas
(1.2)	1500	1487
(1.6)	1590	1621
(1.7)	1516	1502

La figura 8 muestra los ensayos realizados con el esquema (1.8), que tiene tercer orden de aproximación, comparándolo, como siempre, con el esquema (1.2). El esquema (1.8) tiene mucho menor difusión y dispersión en la solución numérica, aunque contiene pequeñas oscilaciones parásitas en la cola. Señalamos que el chequeo de la conservación de este esquema demostró una sobreestimación de la propiedad en un valor completamente despreciable (0.013%), lo que incidió en la decisión final de emplear este esquema en el modelo.

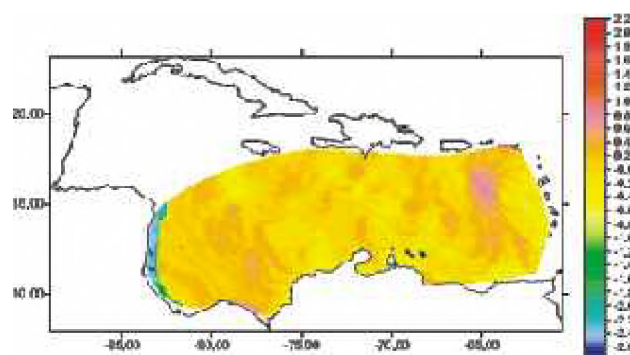
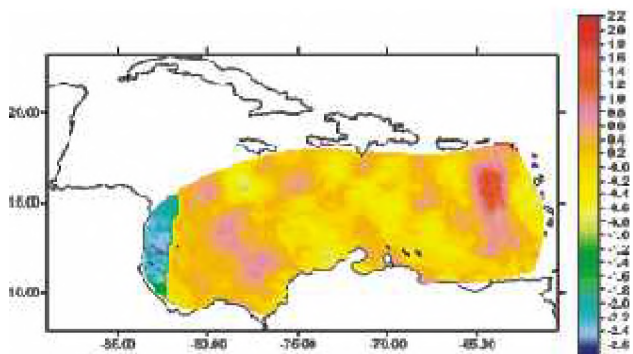
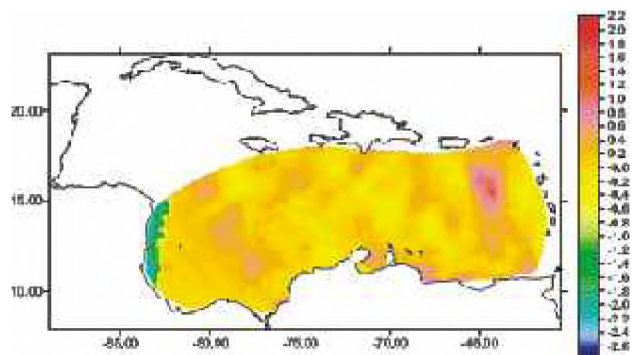


**Figura 8.** Esquema “upward” (contornos negros) en comparación con el de orden  $O(3)$ , [fórmula (1.8), contornos en azul] para el desplazamiento en los cuatro cuadrantes desde el centro [la perturbación inicial tiene coordenadas (25, 25)]; los contornos están trazados con un intervalo de 0.5. El paso de la malla es de 20 km.

Las figuras 9 y 10 muestran los cálculos de casos reales, empleando los vientos de UKMO, comparando las ventajas del esquema (1.8) con los casos del esquema de primer orden y el modelo sin el bloque de transporte. El último caso corresponde a la situación hipotética (no real) del desarrollo de olas localmente, bajo el forzamiento directo de los vientos, pero sin el transporte de energía espacialmente. La tabla 2 muestra la estadística de estas comparaciones.



**Figura 9.** Campo de oleaje (altura en metros) aplicando el bloque de transporte con la aproximación de orden O(3). Fecha: 03 de marzo de 2006.



**Figura 10.** Diferencias (en m) entre las alturas calculadas con los esquemas de O(3) y O(1) (arriba); O(3) y sin el transporte (centro); O(1) y sin el transporte (abajo).

**Tabla 2.** Estadística simple sobre las diferencias entre las alturas de la ola significativa en todo el dominio del Mar Caribe, calculadas con distintos esquemas de transporte; esquema O(0) significa que no se aplicó ninguno (el modelo sin el transporte). Caso presentado en las figuras 9 y 10.

Parámetro	Altura de ola, m	Diferencias entre alturas		
	O(3)	O(3) - O(1)	O(3) - O(0)	O(1) - O(0)
Mínimo	0.1	-2.5	-2.8	-2.9
Máximo	3.9	1.6	2.2	1.7
Promedio	1.5	0.02	-0.01	-0.03
r.m.s.	0.69	0.44	0.71	0.47

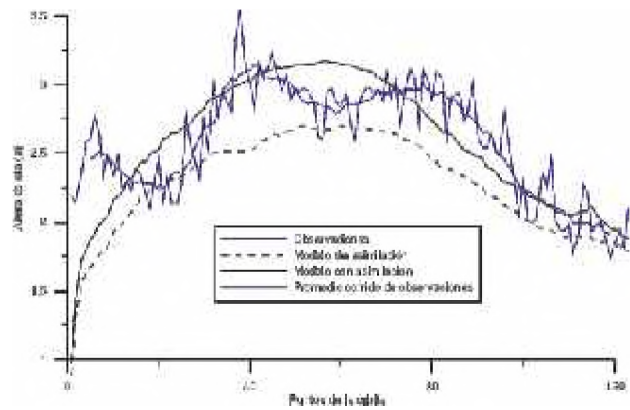
De esta tabla se observa claramente que para algunas zonas del Mar Caribe, el factor de transporte es tan importante que produce un impacto medido en orden de 1.5-3 m, cuando la altura máxima calculada es de orden de 3.9 m. Las zonas de la mayor alteración de campos de oleaje por el transporte de energía de las olas usualmente están concentradas donde se presentan los cambios bruscos de dirección de las olas (parte sur-occidental del mar, figura 9, donde se encuentra influencia de la Zona de Convergencia Intertropical) y en variaciones significativas de la intensidad de vientos (en el presente caso, la zona oriental del Caribe).

En términos de la desviación estándar, la introducción del esquema de O(3) de aproximación de transporte,

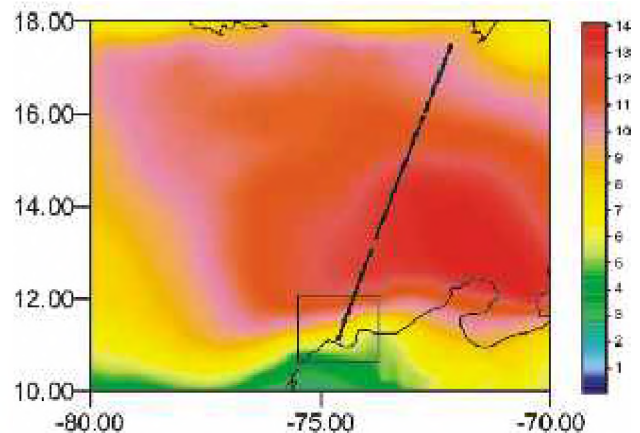
varía con respecto al esquema de O(1) en casi la misma magnitud como en el caso de no introducir (artificialmente) el fenómeno del transporte al modelo. En los experimentos numéricos de asimilación de datos, mostrados más adelante, se empleó el esquema del orden O(3).

Los experimentos de asimilación de datos fueron realizados para el paso del satélite JASON-1 el día 2 de julio de 2007 (paso 39, ciclo 202, la hora 18:17 UTM, figura 12). La figura 11 presenta una comparación entre los datos medidos por el satélite y el modelo sin y con la asimilación de estos datos. Se observan dos zonas de distinto comportamiento del modelo: 1) la zona entre los puntos de la órbita 1 y 15, aproximadamente, donde las diferencias entre el modelo y observaciones no son aceptables y 2) los demás puntos de la órbita, donde el modelo subestima la altura de la ola en unos 20-50 cm. En el trabajo [11] se encontró que UKMO subestima en un 30% la intensidad de los vientos, así que ésta podría ser la explicación del comportamiento del modelo en la segunda zona. La asimilación de datos satelitales elimina estas diferencias, llegando a las desviaciones máximas nunca superiores a 20-30 cm entre el modelo y los datos.

Lo mismo no sucede en la zona 1. La razón de las desviaciones bruscas allá es la baja resolución de la malla del modelo UKMO (0.56° de latitud por 0.83° de longitud). Sobre la tierra la rugosidad superficial hace que los vientos sean incomparablemente más débiles que sobre el mar y a pesar de tratar de eliminar este efecto quitando los puntos terrestres cercanos a la costa en la interpolación de vientos en la malla del NedWAM, la influencia de baja resolución del campo de viento resulta ser notoria. La figura 12 confirma esta circunstancia, demostrando en el rectángulo la zona 1, mencionada arriba.



**Figura 11.** Altura de la ola a lo largo de la órbita del satélite JASON-1, observada, calculada y asimilada en el modelo el día 2 de julio de 2007. El inicio del eje horizontal corresponde al extremo sur de la órbita.



**Figura 12.** Velocidad de viento (en  $m s^{-1}$ ), según el UKMO, para la hora 18:00 del día 2 de julio de 2007. Los puntos indican el paso del satélite por la órbita; el rectángulo muestra la zona de vientos subestimados.

## Discusión

Distintos esquemas numéricos fueron examinados en la primera parte de este trabajo. La comparación entre ellos fue efectuada con respecto al esquema “upward” de primer orden de aproximación de las derivadas. El último tiene una difusión fuerte y fue necesario hacer una revisión de calidad de cálculo del transporte del

espectro con el fin de mejorar la predicción de los campos del oleaje en el Mar Caribe.

Los esquemas TVD, por principio monótonos, fueron examinados para distintas formulaciones de la función limitante de flujos entre las celdas de la malla. Se encontró que estos esquemas subestiman la velocidad de transporte de las propiedades físicas, aunque con debida selección de la forma del limitante, se puede reducir este efecto significativamente. La conservación de la forma inicial de perturbaciones y la ausencia de oscilaciones parásitas en la cola de la solución hacen atractivos estos esquemas. Sin embargo, la conservación integral de las propiedades físicas durante el transporte es una característica importante. La comparación de ésta entre los esquemas TVD y un esquema no simétrico de tercer orden de aproximación espacial fue a favor de la última, a pesar de que el esquema no es completamente positivo. Una vez implementadas las mejoras en la parte de transporte del espectro, se efectuaron los experimentos de asimilación de datos satelitales.

En este trabajo se empleó el caso  $\delta c_1 = \delta c_2 = \delta c_3$  y es el caso más simple posible. La variación de todas las constantes requiere solucionar un problema de optimización más sofisticado. Sin embargo, en los experimentos con el modelo se encontró que esta simple aproximación empleada está dando buena consistencia con lo esperado físicamente: el crecimiento del espectro de olas, la disipación de energía y su re-distribución a lo largo del espacio de fase espectral son mecanismos coherentes.

Los resultados demuestran que las diferencias significativas, si tienen lugar, se deben a la inexactitud de los campos de viento, principalmente en las zonas límites con los continentes, donde la relativamente baja resolución espacial del modelo atmosférico de UKMO subestima la intensidad de los vientos. La solución está en la implementación de un modelo atmosférico local con alta resolución, lo que se realiza actualmente utilizando como base en el modelo WRF [12].

El hecho de que nosotros estemos tratando de “corregir” los campos de viento (o su impacto) a través de variaciones de las constantes situadas ante

los términos de la parte derecha de la ecuación (2.1), asimilando la altura de la ola medida por satélite, deja de lado la circunstancia de que las olas de *swell* interactúan poco con las olas de viento y no se describen con la parte derecha de la ecuación (2.1), sino que son olas transportadas con la exactitud inherente al esquema de transporte empleado, lo cual fue el tema de la primera parte de este estudio.

El satélite, produciendo la información sobre la altura de ola significativa, no distingue en la medición las olas de mar de viento y de *swell*, lo que lleva a considerar un próximo paso en el desarrollo de la presente metodología. Este paso podría incluir la asimilación no de la altura de las olas, sino de un *espectro equivalente* como lo proponen Torres & Lonin en [19]. En tal caso, la función de manejo  $p$  puede ser presentada en la forma

$$p = \delta(\omega - \omega_l) \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) \delta(t - t_0),$$

donde  $l \geq l_{min}$ , es decir,  $\omega_l > w_{swell}$ .

En este caso el funcional  $J(\omega_l > w_{swell})$  tomará sólo una parte del intervalo del espectro, la que no contiene las olas posibles de *swell*. La optimización de las constantes desde (2.15) en este caso va a ser tal vez más consistente físicamente.

Las corridas del modelo “directo-inverso-directo” pueden efectuarse entre los pasos consecutivos del satélite sobre el Mar Caribe, formando un campo espacial de las constantes  $c_i$ , que ahora son funciones  $c_i(x, y)$ , cuya evolución temporal dependerá de las correcciones provocadas por cada paso satelital.

## Agradecimientos

El trabajo fue financiado por la Dirección General Marítima dentro del proyecto SPOA; contrato No. 008/2007-GINRED4-DIMAR, celebrado con la firma OCEANMET LTDA. Los autores agradecen las correcciones y recomendaciones hechas por los evaluadores del artículo. Después de varias modificaciones sustanciales del modelo NedWAM, versión del CIOH, año 1996, la versión actual del modelo obtuvo a partir del año 2008 el nombre CaribWAM-III.

## Referencias bibliográficas

- [1] Komen GJ, Cavaleri L, Donelan M, Hasselmann K, Hasselmann S and Janssen PAEM. (1994). Dynamics and Modelling of ocean waves. Cambridge University Press.
- [2] Tolman HL. (2002). Testing of WAVEWATCH III version 2.22 in NCEP's NWW3 ocean wave model suite. Tech. Note 214, NOAA/NWS/NCEP/OMB, 99 p.
- [3] SWAN. (2007). Technical Documentation. Delft University of Technology, Version 40.51A, 111 p.
- [4] Fletcher CAJ. (1988). Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol 1 & 2. Springer-Verlag, Berlin.
- [5] Thuburn J. (1997). TVD Schemes, Positive Schemes, and the Universal Limiter. Monthly Weather Review, Vol. 125, pp. 1990-1993.
- [6] Tolman HL. (2002). Alleviation the Garden Sprinkler Effect in wind wave models. Ocean Modelling, 4, pp. 269-289.
- [7] Thomas J. (1988). Retrieval of energy spectra from measured data for assimilation into a wave model. Q.J.R. Meteorol. Soc., 114, pp. 781-800.
- [8] Lionello P, H Günther and PAEM Janssen. (1992). Assimilation of altimeter data in a global third generation wave model. J. Geophys. Res. C97, 14453-14474.
- [9] Bauer E, K Hasselmann, I Young and S Hasselmann. (1996). Assimilation of wave data into the wave model WAM using an impulse response function method. J. Geophys. Res. 101, C2, 3801-3816.
- [10] Emmanouil G, Galanis G, Kallos G, Breivik LA, Heiberg H & Reistad M. (2007). Assimilation of radar altimeter data in numerical wave models: an impact study in two different wave climate regions. Ann. Geophys., 25, pp. 581-595.
- [11] Lonin SA y López LA. (2003). Comparación de los pronósticos de UKMO y MM5 para su utilización en el sistema de pronóstico oceanográfico del Caribe. Boletín Científico CIOH, N. 21, pp. 51-65.
- [12] ARW. (2002). Modeling System User's Guide. Versión 2. NCEP, NOAA.
- [13] Lonin SA, IE Lonina y Yu S Tuchkovenko. (1996). Utilización del modelo NedWAM para el cálculo y pronóstico del oleaje en el Mar Caribe. Boletín Científico CIOH, No. 17, Cartagena, pp. 37-46.
- [14] Boris JP & DL Book. (1973). Flux corrected transport. I: SHASTA, a fluid transport algorithm that works. J. Comput. Phys., 11, pp. 38-69.
- [15] Harten A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. J. Comput. Phys., 49, pp. 357-393.
- [16] Roache PJ. (1972). Computational Fluid Dynamics. Albuquerque, N.M.: Hermosa.
- [17] Roe PL. (1986). Ann. Rev. Fluid Mech., 18, pp. 337-365.
- [18] Marchuk GI. (1974). Solución numérica de los problemas de dinámica de la atmósfera y el océano. Leningrado, Gidrometeoizdat, 303 p. (en ruso).
- [19] Torres R y Lonin S. (2007). Construcción de espectros de oleaje en el Caribe a partir de mediciones satelitales. Boletín Científico CIOH, No. 25. En publicación.
- [20] Torres R y Lonin S. (2007). Estudio preliminar del espectro de oleaje en el Caribe observado con boyas y su representación en el espectro JONSWAP. Boletín Científico CIOH, No. 25. En publicación.
- [21] Hunsdorfer W, B Koren, M van Loon & JG Verwet. (1995). A positive finite-difference advection scheme. J. Comput. Phys., 117, pp. 35-46.
- [22] van Leer B. (1974). Toward the ultimate conservative difference scheme. II: Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. J. Comput. Phys., 14, pp. 361-370.
- [23] Hasselmann K, T Barnett, E Bouws, H Carlson, D Cartwright, K Enke, J Ewing, H Gienapp, D Hasselmann, P Kruseman, A Meerburg, P Muller, D Olbers, K Richter, W Sell and H Walden (1973). Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), Dtsch. Hydrogr. Z. Suppl. A8(12), 95p.