

Un modelo basado en las ecuaciones de pendiente suave para la propagación del oleaje y el transporte de sedimentos

A model based on the equations of the gentle slope for wave propagation and sediment transport

DOI: 10.26640/22159045.430

Fecha de recepción: 2017-05-18 / Fecha de aceptación: 2017-08-14

Isabel María Ramos de la Hoz*, Álvaro Galán**, Serguei Lonin*** y Alejandro Orfila****

Ramos de la Hoz, I., Galán, A., Lonin, S. y Orfila, A. (2017). *Un modelo basado en las ecuaciones de la pendiente suave para la propagación del oleaje y el transporte de sedimentos*. Bol. Cient. CIOH (35):25-40. ISSN 0120-0542 e ISSN en línea 2215-9045. DOI: 10.26640/22159045.430

RESUMEN

Se presenta la descripción de un modelo de fase que resuelve las ecuaciones de propagación del oleaje mediante la aproximación de la pendiente suave ("Mild Slope"). El modelo, desarrollado dentro del marco del proyecto del modelo Litodinámico de la Zona Costera - LIZC, realiza un tratamiento de los datos que permite la transformación de un oleaje completamente lineal (sin transporte de sedimentos) en un oleaje no lineal, permitiendo así la modelación del transporte de sedimentos en la zona más somera. En la simulación se utilizan todos los posibles estados de mar de una determinada época, teniendo en cuenta no solo la influencia del oleaje sobre el fondo, sino también el efecto del fondo sobre el oleaje; permitiendo así obtener la evolución de la batimetría para la época en estudio.

PALABRAS CLAVE: modelo numérico, oleaje, ecuaciones de la pendiente suave, transporte de sedimentos, Galerazamba, LIZC.

ABSTRACT

The description of a phase model which solves the equations of wave propagation through the approximation of the mild slope is presented. The model, developed in the context of the "Modelo Litodinámico de Zonas Costeras - LIZC" project, performs a data processing that allows the transformation of a completely linear waves (no sediment transport) to a nonlinear wave in order to model sediment transport in shallow areas properly. In the simulation all possible sea states of a particular period are used, bearing in mind not only the influence of waves on the bottom, but also the effect of bottom on the waves; obtaining the evolution of the bathymetry for the period under study.

KEY WORDS: *numeric model, wave, mild slope equations, sediment transport, Galerazamba, LIZC.*

* Universidad del Norte, Barranquilla. Correo: isaramos1014@gmail.com

** E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos, UCLM, Ciudad Real, España. Correo: Alvaro.Galan@uclm.es

*** Escuela Naval de Cadetes Almirante Padilla, Cartagena. Correo: slonin@costa.net.co

**** IMEDEA (CSIC-UIB), Esporles, Islas Baleares (España). Correo: aorfila@imedea.uib-csic.es

INTRODUCCIÓN

Los modelos numéricos de propagación de oleaje intentan simular varios mecanismos involucrados en la transformación del oleaje. En zonas costeras los mecanismos dominantes son asomeramiento, refracción, difracción por cambios en la batimetría o debido a estructuras, reflexión en la línea de costa, estructuras y por cambios de batimetría, disipación de energía por rotura del oleaje o fricción con el fondo, interacción ola-corriente e interacción ola-ola. Salvo en ocasiones excepcionales, para casos muy sencillos, no se conoce de antemano cuál o cuáles de estos fenómenos son los dominantes para el objetivo que se persigue. Los modelos numéricos buscan, de una manera computacionalmente eficaz, representar la realidad de forma eficiente con la mayor exactitud posible.

En general, se pueden separar los modelos matemáticos de propagación de oleaje en dos tipos: i) modelos de conservación de la energía mecánica y ii) modelos de conservación de la masa o la cantidad de movimiento. Ambos tipos pueden incorporar, de forma más o menos adecuada, la mayoría de los mecanismos arriba descritos. No obstante, los modelos energéticos no pueden captar los efectos de difracción y reflexión causados por la variación del fondo y estructuras costeras. En contraposición, los modelos de conservación de la masa o el momento, son incapaces de incorporar la interacción ola-ola inducida por el viento y además, son computacionalmente más costosos. La presente investigación se centró en la ecuación de propagación para pendiente suave.

La ecuación para pendiente suave, de aquí en adelante MSE por sus siglas en inglés ("Mild Slope Equation"), es un modelo de conservación de masa eficaz a la hora de simular el asomeramiento producido en una zona costera en combinación con la refracción, reflexión y difracción, por lo que se ha convertido en una de las ecuaciones más empleadas desde que fuera introducida por Berkhoff (1972). El modelo fue desacoplado por Copeland (1985), en un par de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, obteniendo

el modelo hiperbólico y reduciendo los costes computacionales de resolver el modelo elíptico inicial. Desde entonces, han sido muchos los investigadores que han puesto de manifiesto la capacidad de la MSE hiperbólica para describir el oleaje en la zona costera (Song, Zhang, Kong, Li, y Zhang, 2007; Suh, Lee, y Park, 1997; Bokaris y Anastasiou, 2003; Lee, Park, Cho, y Suh, 1998).

Para resolver numéricamente las ecuaciones propuestas, generalmente se emplean métodos implícitos para la integración temporal. Aun así, pueden aparecer inestabilidades numéricas, por lo que es habitual el uso de filtros artificiales capaces de absorber estas inestabilidades. No obstante, el uso de filtros numéricos provoca un amortiguamiento de la solución, pudiendo alterar la bondad de la misma. Siguiendo el trabajo en Galán, Simarro, Orfila, Simarro, y Liu (2012), en esta investigación se ha optado por utilizar un esquema numérico explícito Runge-Kutta de 4^o orden para la evolución temporal, empleando una aproximación para las derivadas espaciales hasta orden $O(\Delta x^2)$, siendo Δx el tamaño de malla.

ÁREA DE ESTUDIO

Se utilizaron dos escenarios diferentes para analizar el desempeño del modelo. El primero hace uso de la batimetría del experimento en Galán *et al.*, (2012), y se describe más adelante. Para el segundo escenario de estudio, se utilizó la batimetría del sector de Galerazamba-Colombia, proporcionada por el Centro de Investigaciones Oceanográficas e Hidrográficas del Caribe-CIOH. Esta zona es un sector sin influencia antrópica en la escala local, con una flecha (espiga) costera que interactúa con el régimen fluvial terrestre de la Ciénaga El Totumo y en el régimen de oleaje, presenta una fuerte difracción en la punta de Galerazamba (Figura 1).

METODOLOGÍA

Este apartado contiene las formulaciones del modelo para los módulos hidrodinámico y de transporte de sedimentos, además de algunos experimentos numéricos para la verificación del desempeño del modelo.

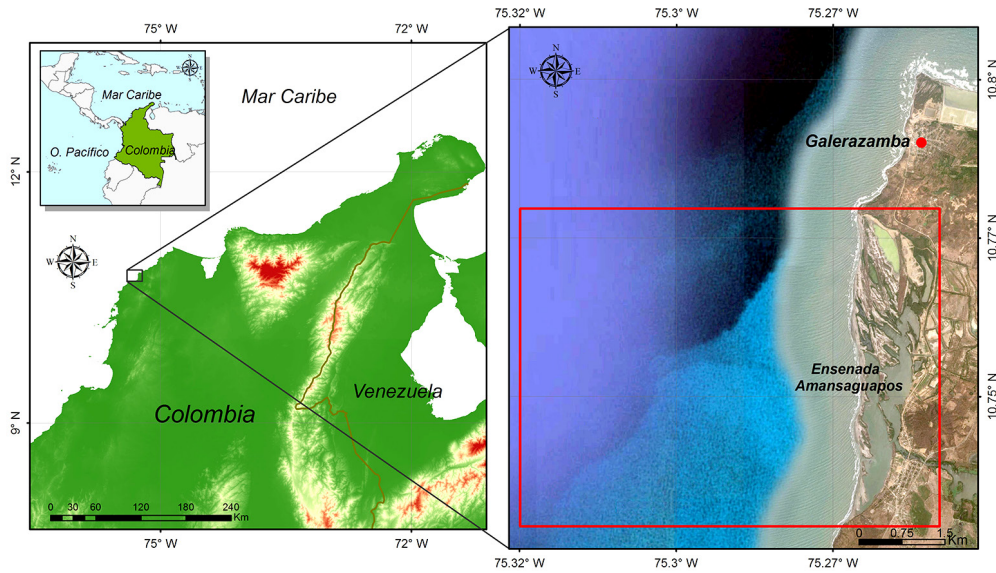


Figura 1. Área de estudio.

Esquema numérico

Ecuaciones: coordenadas cartesianas

Como ya se mencionó, en esta investigación se emplearon las ecuaciones para pendiente suave MSE, en coordenadas cartesianas, y que vienen dadas por Copeland (1985):

$$\frac{C_g}{C} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + CC_g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + CC_g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (1c)$$

Donde η es la elevación de la superficie libre respecto al nivel medio, C y C_g son la velocidad de onda y la velocidad de grupo, respectivamente, y P y Q son la integración vertical de la velocidad horizontal de las partículas en la dirección x e y , respectivamente, por lo que la batimetría está incorporada en las ecuaciones arriba mencionadas.

Función de generación interna

Con el objetivo de evitar los problemas derivados de considerar las ondas como

condiciones de contorno y para posibilitar la generación de oleaje mediante espectros de energía, se presenta la derivación de una función de generación interna. Así, siguiendo el trabajo de Tong Shen, Tang y Cui (2010), se consideró la inclusión de la función fuente en la ecuación de continuidad de tal forma que, siendo s el término fuente, puede escribirse:

$$\frac{C_g}{C} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = s, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + CC_g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + CC_g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (2c)$$

La solución de las ecuaciones anteriores, en su versión homogénea, puede escribirse como:

$$\eta = \eta_0 \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t)), \quad (3a)$$

$$p = p_0 \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t)), \quad (3b)$$

$$q = q_0 \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t)), \quad (3c)$$

siendo $i \equiv \sqrt{-1}$ la constante imaginaria y donde $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ debe satisfacer la relación de dispersión, es decir:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{C^2}$$

Además, p_0 y q_0 deben cumplir:

$$p_0 = \frac{CC_g K_x \eta_0}{\omega}, \quad q_0 = \frac{CC_g K_x \eta_0}{\omega}.$$

Se asume que siendo ψ cualquiera entre η, p, q ó s , para el caso completo se puede escribir:

$$\psi(x, y, t) = \hat{\psi}(x) \exp[i(k_y y - \omega t)],$$

con $|k| < k$ y así las ecuaciones (2) quedan:

$$-i\omega C_g \hat{\eta} + C \hat{p}' + ik_y C \hat{q} = c \hat{s},$$

$$-i\omega \hat{p} + CC_g \hat{\eta}' = 0,$$

$$-i\omega \hat{q} + ik_y CC_g \hat{\eta} = 0,$$

o bien:

$$(k^2 - k_y^2) \hat{\eta} + \hat{\eta}'' = ik \hat{s} / C_g,$$

$$\hat{p} = -iCC_g \hat{\eta}' / \omega,$$

$$\hat{q} = k_y CC_g \hat{\eta} / \omega,$$

Se procede a la solución de la ecuación:

$$(k^2 - k_y^2) \hat{\eta} + \hat{\eta}'' = ik \hat{s} / C_g.$$

Se considera $G_\eta(x, \varrho)$ la solución para un pulso en $x = \varrho$, i.e., solución de:

$$(k^2 - k_y^2) \hat{\eta} + \hat{\eta}'' = \delta(x - \varrho).$$

Para satisfacer la ecuación automáticamente en todo punto excepto en $x = \varrho$,

$$G_\eta = \begin{cases} a_\eta \exp(ik_x(x - \varrho)), & \text{si } x > \varrho; \\ a_\eta \exp(ik_x(\varrho - x)), & \text{si } x < \varrho; \end{cases} \quad (4)$$

siendo $k_x^2 = k^2 - k_y^2$ o bien $k_x = \sqrt{k^2 - k_y^2}$. Falta el punto $x = \varrho$. Integrando en x desde ϱ^- a ϱ^+ :

$$k^2 - k_y^2 \int_{\varrho^-}^{\varrho^+} G_\eta dx + G'_\eta \Big|_{\varrho^-}^{\varrho^+} = 1.$$

Automáticamente $\int_{\varrho^-}^{\varrho^+} G_\eta dx = 0$, y por tanto se debe imponer $G'_\eta \Big|_{\varrho^-}^{\varrho^+} = 1$, i.e., $2ik_x a_\eta = 1$. Ahora:

$$\hat{\eta}(x) = \frac{ik}{C_g} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\phi(x, \varrho) \hat{s}(\varrho) d\varrho \quad (5)$$

y se considera:

$$\hat{s}(\varrho) = D \exp(-\beta \varrho^2), \quad (6)$$

Donde D debe ser determinado y $\beta = 15k_x^2$. Sustituyendo y operando, para $x \rightarrow +\infty$, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{\eta}(x) = \frac{ik}{C_g} D I a_\eta \exp(ik_x x), \quad (7)$$

Donde $I \equiv \sqrt{\pi/\beta} \exp(-k_x^2/4\beta)$. Puesto que se quiere $\eta_0 \exp(ik_x x)$ en $x \rightarrow +\infty$, se alcanza:

$$D = \frac{C_g \eta_0}{ik I a_\eta} = \frac{2k_x C_g \eta_0}{k I}, \quad (8)$$

Y la función fuente es:

$$s(x, y, t) = D \exp(-\beta x^2) \sin(k_y y - \omega t) \quad (9)$$

Lo que asegura que a una cierta distancia de la fuente, el oleaje generado poseerá las características requeridas de frecuencia y altura de ola.

Condiciones de contorno

En este modelo se implementaron dos condiciones de contorno diferenciadas:

- Frontera absorbente. Los detalles para la implementación de la frontera absorbente se explican más adelante.
- Frontera totalmente reflexiva. La implementación de este tipo de frontera tiene implicaciones sobre las matrices de derivación (ver apartado de discretización espacial) ya que se impone:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi \perp} = 0, \quad P \perp = 0 \quad (10)$$

Donde $\xi \perp$ es la dirección perpendicular a la frontera y P es el flujo en la dirección perpendicular.

Esquema numérico

Si se considera $x = \{x, y\}$, las ecuaciones (2) pueden ser reescritas como:

$$Y_0(\eta_t) = E_0(\mathbf{p}) + s(t, x) \quad (11a)$$

$$P_0(\mathbf{p}_t) = F_0(\eta) + \mathbf{d}(\eta, \mathbf{p}) \quad (11b)$$

Donde $\mathbf{p} = \{P, Q\}$ y \mathbf{d} es un término artificial para la absorción de ondas salientes del dominio. Este término adicional, siguiendo el trabajo de Israeli y Orszag (1981), tiene la forma:

$$\mathbf{d} = -\omega_1 \mathbf{p} + \omega_2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{p} + \omega_3 \sqrt{\frac{g}{h}} \eta. \quad (12)$$

Las funciones ω_i son espacio-dependientes y por ejemplo, en el caso de ondas propagándose en la dirección x positiva, para una capa amortiguante entre x_a y x_b vienen dadas por

$\omega_1 = c_i \omega f(x)$, con c una constante a determinar, ω la frecuencia dominante y

$$f(x) = \frac{\exp[(x - x_a)/(x_b - x_a)]^2 - 1}{\exp(1) - 1}$$

En el trabajo de Galán *et al.* (2012) se obtuvieron resultados satisfactorios para valores $c_i = 7,5$ y $c_2 = c_3 = 0$, por lo que se tomaron estos como valores iniciales.

Discretización espacial: notación matricial

Así, siguiendo el método de las líneas, las ecuaciones (10) son discretizadas inicialmente en espacio. Si se considera una malla uniforme de n puntos nodales definidos por sus coordenadas x e y , y considerando los vectores columna η , P y Q , conteniendo los n valores de las variables en cuestión, se puede escribir el vector solución, \mathbf{f} , como:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \eta \\ P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Además, se pueden considerar las matrices de derivación \mathbf{D}_x y \mathbf{D}_y en la dirección x e y respectivamente (dimensión $n \times n$) de tal forma que, por ejemplo, se puede escribir:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \mathbf{D}_x \eta.$$

Nótese que la construcción de las matrices de derivación dependerá del grado de aproximación considerado. Con esto los operadores gradiente (\mathbf{gr}) y divergencia (\mathbf{dv}) vienen dados por:

$$\mathbf{gr} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{dv} = (\mathbf{D}_x \ \mathbf{D}_y).$$

Usando esta notación se pueden escribir las ecuaciones (11) como:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{f}_t = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f} + X(t, \eta, \mathbf{p}). \quad (13)$$

Las matrices \mathbf{L} y \mathbf{R} son:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0}_{n \times 2n} \\ \mathbf{0}_{2n \times n} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{0}_{2n \times 2n} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

Con:

$$\mathbf{L}_{11} = \overline{C_g/C}, \quad (15a)$$

$$\mathbf{L}_{22} = \mathbf{I}_{2n}, \quad (15b)$$

$$\mathbf{R}_{12} = -d\mathbf{v}, \quad (15c)$$

$$\mathbf{R}_{21} = -\overline{CC_g}g\mathbf{r}. \quad (15d)$$

Para más información acerca de la construcción de las matrices implicadas consultar Galán *et al.*, (2012).

Integración temporal: esquema explícito Runge-Kutta de 4° orden

La ecuación 15 es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para los valores nodales de las incógnitas. Este sistema puede reescribirse como:

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{r}(t, \mathbf{f}), \quad (16)$$

Donde $\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f} + X(t, \eta, \mathbf{p})$. Por razones de estabilidad que se discuten más adelante, se elige para la integración temporal un esquema explícito Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). De otro modo, siendo \mathbf{f}^n la solución en el instante $t_n = t_0 + n\Delta t$ se puede escribir:

$$\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \Delta t \frac{\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4}{6}, \quad (17)$$

Donde:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{r}(t^n, \mathbf{f}^n), \quad (18a)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{r}(t^n + \Delta t/2, \mathbf{f}^n + \Delta t\mathbf{K}_1/2), \quad (18b)$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{r}(t^n + \Delta t/2, \mathbf{f}^n + \Delta t\mathbf{K}_2/2), \quad (18c)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{r}(t^n + \Delta t, \mathbf{f}^n + \Delta t\mathbf{K}_3). \quad (18d)$$

Por tanto, en cada paso de tiempo hay que resolver 4 sistemas de ecuaciones donde las matrices del sistema son diagonales y dispersas.

Estabilidad lineal

Si se eliminan los términos fuente y los términos de amortiguamiento en la expresión (16), se tiene:

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{f}, \quad (19)$$

Para que el modelo numérico sea estable se debe imponer que todos los autovalores de la matriz \mathbf{A} , v_j , multiplicados por el paso temporal Δt , representados en el plano real-imaginario, se encuentren en el interior de la región de estabilidad del método de integración elegido. La Figura 2 muestra la región de estabilidad para el esquema Adams-Bashford de tercer orden (AB3), para el esquema Adams-Moulton de cuarto orden (AM4) y para el esquema Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Como puede apreciarse la región de estabilidad de mayor extensión corresponde con el método de cuarto orden, por lo que se ha elegido para el presente trabajo como método de integración temporal permitiendo mayores valores del paso temporal, y por tanto, una mayor velocidad de cómputo.

De la Figura 2 puede extraerse que, definiendo $v_{\max} = \max |v_j|$, el método RK4 proporciona esquemas estables para:

$$v_{\max} \Delta t \lesssim 2,8278, \quad (20)$$

Lo que puede considerarse como condición CFL necesaria para la estabilidad. En una dimensión, en el caso de fondo plano, el valor de v_{\max} depende de ω , de g , de h y de Δx ; además del orden de la aproximación usada para el cómputo de las derivadas espaciales, o , y también del número de nodos, n . Por análisis dimensional:

$$\frac{v_{\max} \Delta x}{\sqrt{gh}} = f_x \left(\pi_1 \equiv \frac{\Delta x}{h}, \pi_2 \equiv \frac{\omega^2 h}{g}, o, n \right). \quad (21)$$

Las figuras 3 y 4 muestran el comportamiento de la función f_x para diferentes valores de π_1 y π_2 . En ambos casos se ha tomado $n=5$, dado que la influencia de n se ha comprobado se desvanece para valores de $n \geq 20$.

Como puede apreciarse, la función de estabilidad f_x es independiente del valor del grupo π_1 . Además, para valores elevados del grupo π_2 , la función tiende a cero; mientras que para valores pequeños, se vuelve constante con límites:

$$\lim_{\pi_2 \rightarrow -\infty} f_x = \begin{cases} 1,0000, & 2^\circ \text{ orden en espacio} \\ 1,3722, & 4^\circ \text{ orden en espacio} \end{cases} \quad (22)$$

De acuerdo con las expresiones (19) y (20), el paso temporal deberá elegirse de modo que:

$$\frac{\sqrt{gh\Delta t}}{\Delta x} \lesssim \frac{2,8278}{f_x}, \quad (23)$$

O lo que es lo mismo, en 1D, la condición Courant-Friedrich-Levy (CFL) queda como:

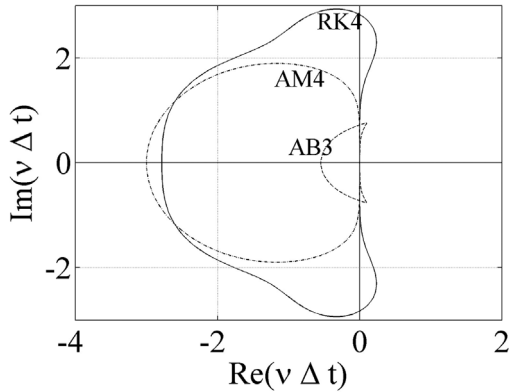


Figura 2. Regiones de estabilidad para el esquema Adams-Bashford de 3^{er} orden (AB4), para el esquema Adams-Moulton de 4^o orden (AM4) y para el esquema Runge-Kutta de 4^o orden (RK4).

$$\frac{\sqrt{gh\Delta t}}{\Delta x} \lesssim \begin{cases} 2,828, & 2^\circ \text{ orden en espacio,} \\ 2,061, & 4^\circ \text{ orden en espacio.} \end{cases} \quad (24)$$

En el caso 2D el análisis de estabilidad es similar, partiendo del análisis dimensional (para n suficientemente grande) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{v_{\max} \Delta s}{\sqrt{gh}} \\ &= f_s \left(\pi_1 \equiv \frac{\Delta s}{h}, \pi_2 \equiv \frac{\omega^2 h}{g}, \pi_3 \right. \\ & \left. \equiv \frac{\Delta x}{\Delta y}, 0 \right), \end{aligned} \quad (25)$$

Con $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Tomando $\Delta x = \Delta y$ la función f_s presenta como límites:

$$\lim_{\pi_2 \rightarrow -\infty} f_s = \begin{cases} 2,0000, & 2^\circ \text{ orden en espacio,} \\ 2,7444, & 4^\circ \text{ orden en espacio,} \end{cases} \quad (26)$$

Obteniendo como condición CFL en 2D:

$$\frac{\sqrt{gh\Delta t}}{\Delta s} \lesssim \begin{cases} 1,414, & 2^\circ \text{ orden en espacio,} \\ 1,030, & 4^\circ \text{ orden en espacio.} \end{cases} \quad (27)$$

Para valores $Dx \neq Dy$ de se puede llevar a cabo un análisis de estabilidad similar, obteniendo diferentes condiciones CFL.

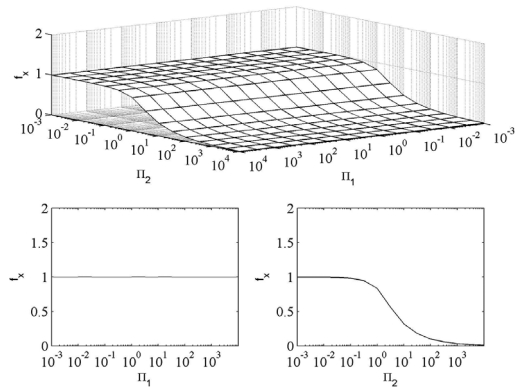


Figura 3. Comportamiento de la función f_x para derivadas de orden 2. Se ha tomado $n = 50$ ya que se observa que f_x deja de depender de n para valores por encima de 20.

Transporte de sedimentos

Modificación del oleaje por rotura

El módulo hidrodinámico propaga trenes de ondas desde aguas profundas a aguas someras. Si bien el modelo resuelve las ecuaciones lineales bajo la hipótesis de pendiente suave, cuando el peralte de la onda es suficientemente elevado, la onda sufre un proceso de rotura, disipándose energía y aumentando el caudal sólido en la zona de rompientes.

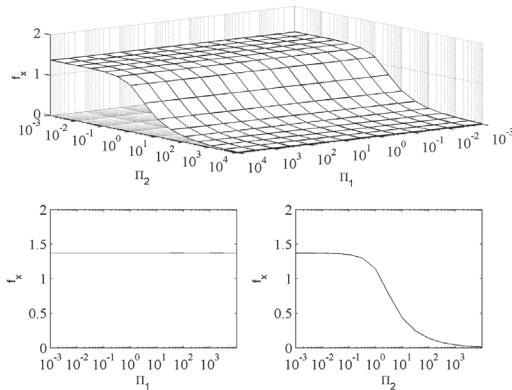


Figura 4. Comportamiento de la función f_x para derivadas de orden 4. Se ha tomado $n = 50$ ya que se observa que f_x deja de depender de n para valores por encima de 20.

Para simular numéricamente este proceso se ha añadido una disipación artificial de energía, de forma que se aplica una "sponge layer", mediante la variable $C_{s,rotura}$, interna al dominio, cuyo valor vendrá dado por:

$$C_{s,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{|\eta|}{h} \leq \epsilon \\ \left(\frac{|\eta|}{h} - \epsilon\right)^{0.5} & \text{si } \frac{|\eta|}{h} > \epsilon \end{cases}, \quad C_{s,rotura} = \min\{C_{s,1}, 2\},$$

Donde ϵ es un parámetro a calibrar. Para los resultados numéricos previos se ha tomado un valor de $\epsilon \approx 0.3$.

Expresiones empleadas para la obtención de la velocidad en el fondo

De la simulación realizada con el módulo hidrodinámico se obtiene, para cada punto la superficie libre, η y las variables P y Q , tal y

como se muestra en la Figura 5. Dado que la generación de oleaje se realiza para trenes de ondas multicromáticos, se requiere que el tiempo de salida del modelo sea múltiplo de los periodos de oleaje considerados. Para el ejemplo considerado, dado que se está generando un oleaje bicromático, con periodos $T = 5s$ y $T = 7s$, la salida de datos tendrá al menos una duración de $t_{max} = 35s$.

De la serie temporal de las variables P y Q se puede obtener el vector unitario que define la dirección del vector de onda,

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \mathbf{e}_k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{e}_k = \{\cos\phi, \sin\phi\}, \quad \phi = \arctan \frac{Q}{P}$$

De acuerdo con la teoría de Airy, para una onda progresiva ($x = \{x, y\}$), la superficie libre es:

$$\eta = \eta_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t),$$

Siendo η_0 la amplitud de onda y $\omega = 2\pi/T$ la frecuencia. En el caso de un tren de ondas, la superficie vendrá dada por:

$$\eta = \sum_i \eta_{0,i} \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega_i t),$$

Donde el subíndice "i" indica la componente i-ésima del tren de ondas generado. Así mismo, la velocidad horizontal, $\mathbf{u} = \{u, v\}$ para una onda monocromática vendrá dada por:

$$\mathbf{u}(z) = \eta_0 \omega \frac{\cosh[\mathbf{k}(h+z)]}{\sinh(\mathbf{k}h)} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t),$$

Así, siendo h la profundidad a la cual se propaga la onda. De lo anterior, la **velocidad** en el **fondo** $z = -h$ será:

$$\mathbf{u}_b = \eta_0 \omega \frac{\cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t}{\sinh(\mathbf{k}h)}$$

Es decir:

$$\mathbf{u}_b = \eta\omega / \sinh(\mathbf{k}h),$$

No obstante, para aguas someras, donde el transporte de sedimentos es más significativo $\sinh(\mathbf{k}h) \rightarrow kh$, y por tanto:

$$\mathbf{u}_b = \frac{\eta\omega}{\mathbf{k}h} = \frac{\eta\mathbf{C}}{h}$$

Donde \mathbf{C} es la celeridad de la onda. De esta forma, la historia de velocidades para el mismo punto representado en la Figura 5 aparece representado en la Figura 6.

Se puede demostrar que, al tratarse de un modelo de propagación de oleaje lineal, los promedios temporales de las velocidades son nulos, y por tanto, el transporte de sedimentos también lo será. De aquí que se deba introducir una modificación en la serie de velocidades de acuerdo a la teoría de Stokes. Para una onda monocromática progresiva (lineal), definida por su superficie libre y velocidad como:

$$\eta = \eta_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t),$$

$$U_b = U_{b,0} \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t),$$

$$V_b = V_{b,0} \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t),$$

Se puede comprobar que, atendiendo a la teoría de Stokes, la velocidad bajo la cresta y bajo el seno de la onda vendrán dadas por:

$$U_{b,cresta} = U_{b,0}\alpha, \quad V_{b,cresta} = V_{b,0}\alpha,$$

$$U_{b,seno} = (2 - \alpha)U_{b,0}, \quad V_{b,seno} = (2 - \alpha)V_{b,0},$$

Donde:

$$\alpha = 1 + 0.3 \frac{H_s}{h}$$

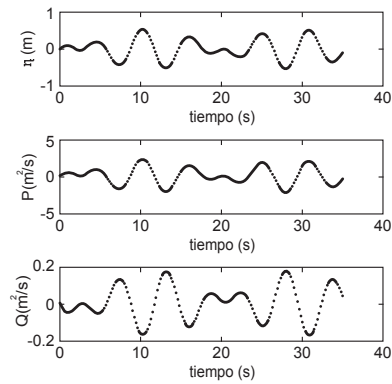


Figura 5. Ejemplo de serie temporal para ondas introducidas de $T = 5s$ y $T = 7s$

En la expresión anterior, H_s es la altura de ola significante. De esta forma, a partir de una onda lineal (simétrica), se puede asimilar una onda no lineal, con transporte de sedimentos no nulo. Así, para cada punto el procedimiento seguido será:

1. Obtener la serie temporal de velocidad en el fondo para la onda propagada
2. Hallar H_s para cada punto y con ella el valor de α
3. Para cada punto, obtener η_0 , $U_{b,0}$ y $V_{b,0}$ como valor medio de la amplitud de la velocidad para las diferentes ondas propagadas
4. Asimilar el oleaje propagado a una onda monocromática de amplitudes para superficie libre y velocidad η_0 , $U_{b,0}$ y $V_{b,0}$ en cresta y seno

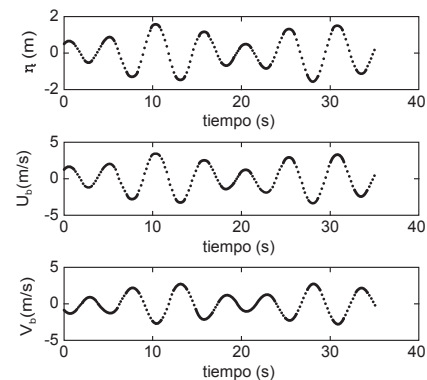


Figura 6. Ejemplo de serie temporal de velocidades en el fondo para ondas introducidas de $T = 5s$ y $T = 7s$.

Expresiones empleadas para la obtención de la tensión y transporte de sedimentos

La tensión tangencial transmitida al fondo puede expresarse como:

$$\tau_b = \frac{1}{2} \rho f_w U_\delta^2,$$

Donde ρ es la densidad del fluido, f_w es el coeficiente de fricción y U_δ es la velocidad instantánea cerca del fondo. Para flujo turbulento rugoso, en Jonsson (1996), se llegó a expresar el coeficiente de fricción como:

$$f_w = \exp \left[-6 + 5.2 \left(\frac{A_b}{k_{sw}} \right)^{-0.19} \right],$$

Donde A_b es la amplitud del oleaje en el fondo y k_{sw} rugosidad equivalente, que usualmente puede tomarse como $k_{sw} \approx 2d_{50}$ siendo d_{50} el tamaño medio del sedimento. Para la expresión anterior:

$$A_b = \frac{H/2}{\sinh(2kh)},$$

Donde $H = 2\eta_0$ es la altura del oleaje. Para el cálculo del transporte sólido se empleará la formulación de Van Rijn y Kroon (1992), donde el caudal sólido de fondo instantáneo en m^2/s vendrá dado por:

$$\frac{q_b(t)}{d_{50} d_{50,*}^{-0.3} u_*} = 0.25 \alpha_b \left(\frac{\tau_b - \tau_c}{\tau_c} \right)^{3/2},$$

Siendo τ_c la tensión crítica de inicio del movimiento, obtenida mediante el parámetro de Shields, y:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}, \quad \alpha_b = 1 - \left(\frac{H_s}{h} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_{50,*} = \left(\frac{g \Delta d_{50}^3}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

Con v la viscosidad dinámica del fluido y $\Delta = (\rho_s - \rho)/\rho$ la densidad relativa sumergida. La tensión crítica de inicio del movimiento puede hallarse empleando el ábaco de Shields (1936), por ejemplo:

$$\frac{\tau_c}{\rho g \Delta d_{50}} = \frac{0.23}{d_{50,*}} + 0.054 \left[1 - \exp \left(-\frac{d_{50,*}^{0.85}}{23} \right) \right].$$

Modificación de la batimetría

Para la modificación de la batimetría se asume que el transporte de sedimentos se mantiene constante durante el estado de mar considerado, de forma que, una vez obtenido el valor de $q_b(t)$, se procede a hallar el valor promedio en cada punto en forma vectorial, es decir:

$$\overline{\mathbf{q}_b} = \left(\frac{1}{t_{max}} \int_{t=0}^{t=t_{max}} q_b(t) dt \right) \mathbf{e}_k.$$

Para la modificación de la batimetría se emplea la formulación de Exner, donde:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{1-n} \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_b},$$

De forma que, considerando para la integración temporal el método de Euler, se obtiene:

$$h^{n+1} = h^n + \Delta t \frac{\partial h}{\partial t},$$

Ejemplos numéricos:

Función fuente 1D y condiciones absorbentes

En este ejemplo numérico se pretende mostrar la bondad de la generación de la función fuente en 1D. Para ello se genera un tren de ondas monocromático sobre fondo plano y se compara con la solución de Airy (teoría lineal de oleaje). Para el ejemplo, se ha tomado un periodo de oleaje $T = 0,5s$ y una aceleración de la gravedad $g = 9,8m/s^2$ propagándose sobre una profundidad de $h = \{1, 10, 25, 50\}$. La teoría lineal de Airy arroja unos valores de longitud de onda y celeridad recogidos en la tabla I. Se quiere que la onda a generar tenga una amplitud de $\eta_0 = 1m$. La condición de estabilidad para

todos los casos sería en $CFL = 0,9$ con $\sigma = 4$ y $n = 1000$ y $dx = 0,25m$.

La Figura 7 muestra las amplitudes conseguidas en las diferentes profundidades, comparada con la amplitud requerida para un tiempo $t = 10T$, suficiente para que la onda alcance el contorno. En todos los casos la onda generada posee la amplitud requerida, quedando validada la generación en el caso 1D. Del mismo modo, se comprueba que la función de absorción, también trabaja adecuadamente en ambas fronteras (la generación se produce en el centro del dominio y ambas fronteras son absorbentes).

Tabla 1. Valores de longitud de onda y celeridad calculados con la teoría de Airy. El periodo $T = 0,5s$ y la gravedad $g = 9,8m/s^2$ se mantienen constantes.

$h(m)$	λ Airy (m)	C (Airy (m/s))
5	30.323	6.064
10	36.614	7.322
25	39.035	7.807
50	39.060	7.812

Función fuente 2D y condiciones absorbentes

Para la comprobación del correcto funcionamiento de la función fuente en el caso 2D se tomará el mismo ejemplo que en la generación 1D (apartado anterior) considerando solo el caso en que $h = 5m$. El ángulo de incidencia es de 30° y la longitud del frente es de 50 m.

Al igual que en el caso 1D, la amplitud de la onda es la requerida. Además, el ángulo de incidencia coincide exactamente con el impuesto, quedando validada así la función de generación interna de ondas en 1D y 2D. Las condiciones de contorno absorbentes no introducen inestabilidades ni ondas ficticias en el dominio de estudio (Figura 8).

Caso de estudio: isla emergida conoidal y condiciones reflexivas

Para el estudio de la introducción de línea de costa y el tratamiento de estas fronteras se ha implementado la batimetría del experimento de Briggs, Synolakis, Harkins y Green (1995). Se trata de una isla conoidal emergida en un tanque de 25 m de largo y 30 m de ancho y una profundidad de 0.32 m. La isla se encuentra

centrada en el punto $x_c = 13 m$ e $y_c = 15 m$ y posee un diámetro en la base de 7.2 m. Al nivel de la superficie libre el diámetro es de 4.64 m y en la parte superior es de 2.2 m (la pendiente de los taludes de la isla es 1:4). Las condiciones de contorno se han planteado puramente reflexivas y como condición inicial se introduce una onda solitaria (test 3 en Briggs *et al.*, 1995) de la forma:

$$\eta(x, t = 0) = H \operatorname{sech}^2 [\gamma(x - x_c)], \quad (28)$$

Con $\gamma = \sqrt{0,75H}$ y x_c siendo el centro de la onda solitaria. En el caso considerado $H = 0,20m$. Las figuras 9 y 10 muestran la superficie libre en diferentes instantes de tiempo. Como se puede observar, tanto las condiciones puramente reflexivas como el tratamiento de las islas internas y líneas de costa están funcionando correctamente, no generando inestabilidades en el modelo.

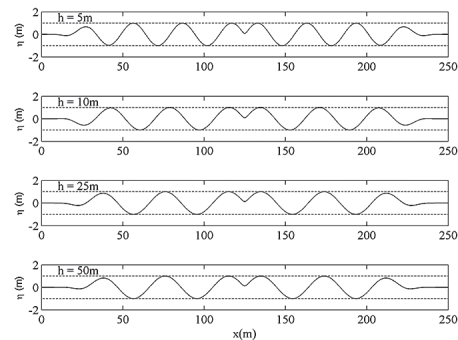


Figura 7. Generación de onda monocromática 1D con $T = 5s$ y $g = 9,8m/s^2$ sobre fondo plano de diferente profundidad. Valores obtenidos para un tiempo $t = 10T$.

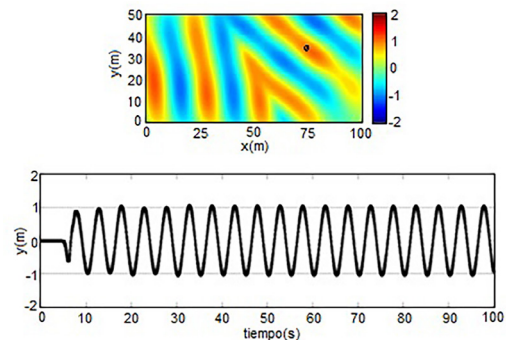


Figura 8. Generación de onda monocromática 2D con $T = 5s$ y $g = 9,8m/s^2$ sobre fondo plano de profundidad $h = 5m$ con ángulo de incidencia $\phi = 30^\circ$. Arriba captura de pantalla para tiempo $t = 10s$ y punto objetivo marcado con círculo negro. Abajo serie temporal de elevación detectada en punto objetivo.

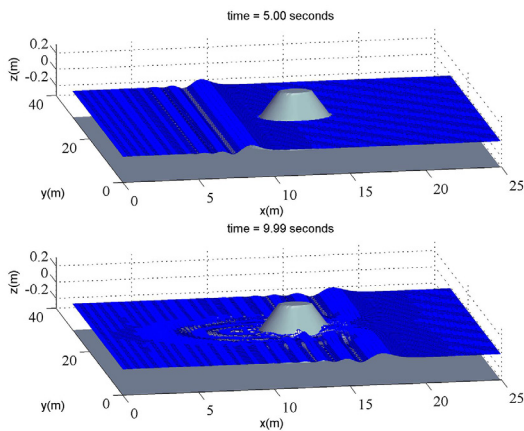


Figura 9. Caso de ejemplo: isla conoidal (1/2).

RESULTADOS

Resultados previos

Para la comprobación del correcto funcionamiento del modelo, se generó una malla de cálculo en la zona de Galerazamba, cuyas características se consignan en la Tabla 2.

El oleaje introducido se trata de un tren de ondas bicromático con periodos de 8 y 10s respectivamente y alturas de ola de 0.8 m para ambas componentes (alturas de ola máximas esperadas de 1.6 m). El estado de mar se considera con una duración de 3 horas. La Figura 11 muestra la batimetría inicial de la zona de estudio. La generación del oleaje se produce en aguas profundas, más específicamente en $x = 300$ m.

Tabla 2. Características de la malla utilizada en la simulación para la zona de Galerazamba.

Características	Detalle
Número de puntos de malla en dirección de avance de oleaje	1546
Número de puntos de malla en dirección perpendicular al avance de oleaje	437
Resolución de malla en dirección de avance de oleaje	1 m
Resolución de malla en dirección perpendicular al avance de oleaje	3 m
Ángulo de incidencia del oleaje	N 90' E

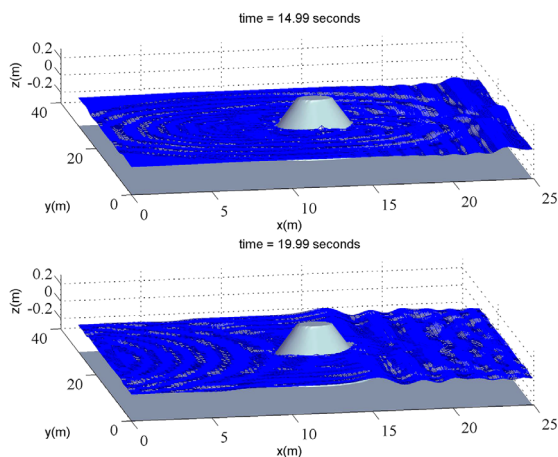


Figura 10. Caso de ejemplo: isla conoidal (2/2).

La Figura 12 muestra las variables hidrodinámicas obtenidas con el módulo de propagación para un punto situado próximo a la zona de rotura. Cabe destacar que la magnitud de la variable P, que mide el "transporte de masa" en dirección "x" es de un orden de magnitud superior a la magnitud Q que mide el transporte en la dirección perpendicular, tal y como era de esperar. El caudal sólido medio a lo largo del estado de mar se puede ver en la Figura 13. Asociado a dicho caudal, la variación del fondo a lo largo de las 3 horas de duración del estado de mar aparece representada en la Figura 14. Como puede apreciarse aparece un claro predominio del transporte sólido en una primera zona de rotura, tras la cual, la pérdida de energía del oleaje hace que disminuya la intensidad de dicho transporte.

Así, la batimetría modificada tras el estado de mar aparece representada en la Figura 15.

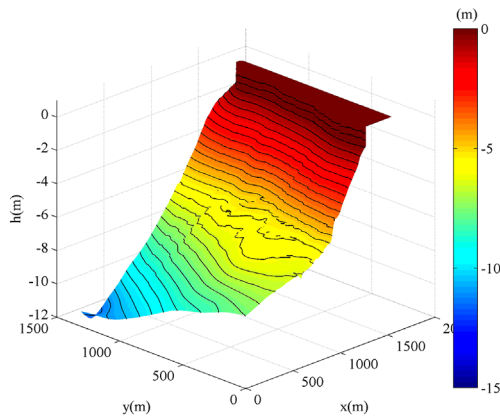


Figura 11. Batimetría inicial de la zona de estudio.

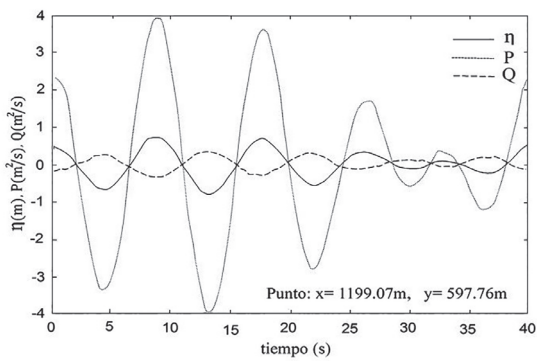


Figura 12. Serie temporal de la superficie libre $\eta(t)$ y de las variables P y Q para un punto situado cerca de la zona de rotura.

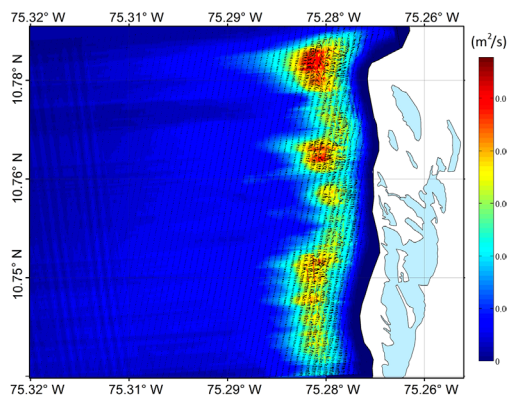


Figura 13. Caudal sólido medio durante el estado de mar en m^2/s en módulo (colores) y dirección (flechas).

DISCUSIÓN

Los modelos que resuelven la fase, como los basados en las MSE tienen frente a los modelos espectrales, la ventaja de no presentar pérdida de información de la fase, debido a que la altura de la lámina es obtenida de forma determinista en cada instante y en cada punto.

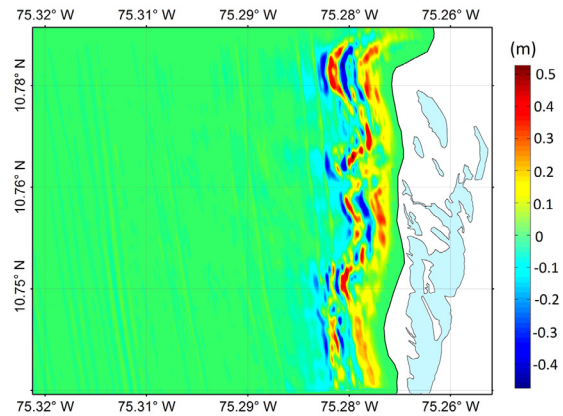


Figura 14. Variación en la batimetría durante el estado de mar. Valores negativos en la variación del fondo indican erosión, valores positivos deposición de sedimentos.

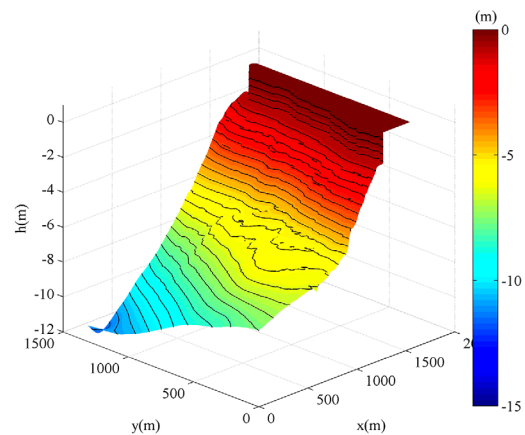


Figura 15. Batimetría final tras la propagación y el cómputo del transporte de sedimentos.

A pesar de esto, la implementación de este tipo de modelos se ve limitada debido al alto costo computacional requerido, teniendo en cuenta que los tamaños de malla deben de ser

del orden de $L/50$ o $L/20$; siendo L la longitud de onda característica del oleaje; y el paso de tiempo para la integración temporal uno o dos órdenes de magnitud inferior al periodo característico del oleaje (Universidad de la Coruña, 2013).

El modelo desarrollado en la presente investigación, basado en la forma hiperbólica de la ecuación de la pendiente suave, implementa como método de integración temporal el esquema Runge-Kutta de 4º orden (RK4), permitiendo mayores valores del paso temporal, y por tanto, una mayor velocidad de cómputo, con lo que el inconveniente mencionado anteriormente queda parcialmente resuelto.

La forma elíptica de la ecuación MSE implica la imposición de condiciones de contorno en todos los límites del dominio en los modelos que la utilizan (p. ej. MSP-IH Cantabria y MIKE 21 EMS-DHI), generando problemas en cuanto a las condiciones de absorción para incidencia oblicua del oleaje por la aparición de reflexiones no deseadas, propias del modelado numérico. Además, para la propagación en superficies muy grandes, el método de los elementos finitos exige el uso de grandes mallas, lo cual se traduce en un elevado tiempo de computación (Losada, Medina, Losada y Vidal, 1995). Otros modelos han desarrollado una extensión parabólica de esta ecuación, lo que permite aplicar condiciones de contorno (reflexivas o abiertas) solamente en los contornos de incidencia del oleaje, asumiendo que la onda se propaga en una dirección predominante (p. ej. OLUCA-IH Cantabria, MIKE 21 PMS-DHI), lo cual es una desventaja frente a los modelos hiperbólicos, ya que, ante un oleaje cambiante en dirección, la malla de cálculo también debería modificarse para alinearse con este. En comparación con los modelos elípticos, los modelos hiperbólicos ofrecen la ventaja de la reducción en el tiempo de cálculo, particularmente en dominios bidimensionales y además, son capaces de incorporar contornos de intensidad arbitraria para los mecanismos de reflexión, refracción y difracción (Lee *et al.*, 1998). En este sentido, las condiciones de contorno absorbentes y reflexivas aplicadas en esta investigación, demostraron no generar inestabilidades y funcionar correctamente, tal y como se puede observar en los diferentes ensayos realizados, en donde para las condiciones absorbentes, el

modelo responde de forma satisfactoria a los ejercicios en los que se aplicó la solución de Airy y a la prueba con la batimetría de Briggs *et al.*, (1995) para las condiciones reflexivas, todos ellos con tiempos de cómputo eficientes.

Adicionalmente, teniendo en cuenta que el modelo desarrollado en este estudio se realizó dentro del marco del proyecto LIZC, fue implementado un módulo de transporte de sedimentos como parte complementaria, que se encarga de resolver el transporte de sedimentos y la evolución morfológica de la batimetría costera, a partir de los resultados del módulo hidrodinámico. Dado que el transporte de sedimentos depende del sistema circulatorio en la zona de rompientes, el cual a su vez es inducido por el oleaje (Losada *et al.*, 1995), hay que considerar que las ecuaciones hidrodinámicas aquí utilizadas resuelven un modelo lineal, por lo que fue necesario un tratamiento previo de los datos tal que, se hiciera la transformación de un oleaje completamente lineal (sin transporte de sedimentos) en un oleaje no lineal. Numerosos autores han desarrollado modificaciones y extensiones a la ecuación de la pendiente suave valiéndose de las teorías de Airy, Stokes, y en la expresión de Hedges entre otras, con el propósito de solucionar la interacción oleaje-corriente. La ecuación desarrollada en esta investigación hace uso de la teoría de Stokes para modificar la velocidad bajo las crestas y bajo el seno de una onda, mediante la asimilación de una onda no lineal con transporte de sedimentos no nulo, lo cual demostró el funcionamiento esperado como puede observarse en la Figura 6.

En este orden de ideas, el módulo de transporte de sedimentos, ejecutado una vez que se tuvieron los resultados del módulo hidrodinámico para el ejercicio en Galerazamba, mostró el buen desempeño de las formulaciones aplicadas (figuras 12-14), iniciando con la propuesta por Van Rijn y Kroon (1992), para el transporte sólido, la cual es una de las más usadas en la actualidad en ambientes costeros al proporcionar una baja dispersión respecto a las mediciones (Cinat, 2012), y cuya efectividad fue comprobada por Bayram, Larson y Hanson (2007), para las corrientes de marea y en la zona sur. Del mismo modo, la ecuación de Exner, utilizada para describir la evolución del fondo

después de simular un estado de mar, también mostró estar cumpliendo con su objetivo.

CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo basado en las ecuaciones de "mild-slope" con la capacidad de alimentar el modelo LIZC y mostrando un alto rendimiento computacional, para lo cual se configuró y validó una función de generación interna en casos 1D y 2D, comprobando que las ondas creadas poseen las amplitudes requeridas, y el ángulo de incidencia coincide exactamente con el impuesto. Además, se verificó que las condiciones reflexivas y absorbentes aplicadas, no generaron inestabilidades ni ondas ficticias. En cuanto al caso aplicado en la zona de Galerazamba, el modelo presentó una respuesta coherente respecto a las formulaciones aplicadas para el transporte de sedimentos y la modificación del fondo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bayram A., Larson M., Hanson H. (2007). A new formula for the total longshore sediment transport rate. *Coastal Engineering*, 54:700–710.
- Berkhoff, J. C. W. (1972). "Computation of Combined Refraction-Diffraction." *Proceeding of the 13th International Conference Coastal Engineering*, Vancouver, ASCE, 1, 471-490.
- Bokaris, J., Anastasiou, K. (2003). Solution of the hyperbolic mild-slope equations using the finite volume method. *International Journal for numerical methods in fluids*. Volume 41, 225-250.
- Briggs, M. J., Synolakis, C. E., Harkins, G. S., Green, D. R. (1995). Laboratory experiments of *tsunami* runup on a circular island, *PA-GEOPH* 144 (3/4), 569-593.
- Cinat, P. (2012). Sediment transport models for shallow waters equations. (Tesis Maestría). Universidad de Pisa. Pisa, Italia. Recuperado de: https://project.inria.fr/medlagoon/files/2012/11/TesiSWE_Cinat.pdf.
- Copeland, G. J. M. (1985) "A Practical Alternative to the "Mild Slope" Wave Equation." *Coastal Engineering*, Vancouver, 9(2), 125-149.
- Galán, A., Simarro, G., Orfila, A., Simarro, J. Liu, P. L.-F. (2012). "A fully nonlinear model for water wave propagation from deep to shallow waters". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering-ASCE*, 138:5, 362-371.
- Israeli, M., y Orszag, S. (1981). "Approximation of radiation Boundary conditions". *J. Comp. Phys.* Vol 41, 115-135.
- Jonsson, I. G. (1966). Wave boundary layers and friction factors, in *Proceedings of 10th Conference on Coastal Engineering*, pp. 127–148, Am. Soc. of Civ. Eng., Reston, Va.
- Lee, C., Park, W.S., Cho, Y-S. y Suh, K.D. (1998). Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, Volumen 24, 243-257.
- Losada, I.J., Medina, R., Losada, M.A., Vidal, C. (1995). Modelos hidrodinámicos y de transporte de sedimentos. *Ingeniería del agua*, [S.l.], v. 2, n. 1, mar. ISSN 1886-4996.
- Shields, A. (1936). "Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung, "[Application of similarity principles and turbulence research to bedload movement]. *Mitteilungen der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*, Berlin, 26, 26 pp.
- Song, Z., Zhang, H., Kong, R. Li., Zhang, W. (2007). An efficient numerical model of hyperbolic mild-slope equation. In *proceedings of the international conference on Offshore mechanics and Arctic engineering – OMAE*, vol 5, pages 253-258.
- Suh, K.D., Lee, C., Park, W.S. (1997). Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. *Coastal Eng.* 32, 91–117.
- Tong, F.F., Shen Y., Tang J. y Cui L. (2010). Water wave simulation in curvilinear coordinates using a time-dependent mild slope equation." *Journal of Hydrodynamics*, Ser. B, 22(6), 796 - 803.

Universidad de la Coruña- E.T.S Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. (2013). Análisis comparativo de diferentes metodologías para el cálculo de corrientes litorales generadas por oleaje. Recuperado de: <http://www.gea-ma.org/hidraulica/index.php?s=39>

Van Rijn, L.C. y Kroon, A. (1992). Sediment transport by currents and waves. Proc. 23rd Intern. Conference on Coastal Engineering, Venice, 2613-2628.