

**MODELOS
COMPUTACIONALES
EN ACUSTICA OCEANICA**

Por: HERNAN ESTRADA
Dr. rer. nat. Profesor Titular
Depto. de Física
Universidad Nacional
Santafé de Bogotá

RESUMEN

Se discuten diferentes modelos de propagación para la ecuación de ondas del sonido en el océano. Se considera en particular el método de rayos y se desarrolla un programa de cómputo basado en ecuaciones diferenciales, con el fin de realizar el trazado de rayos de manera sencilla.

ABSTRACT

It is discussed different solution models for the wave equation for the underwater sound propagation. In particular it is consider the ray propagation model and using ordinay differential equations is developed a program code to obtain in an easy way the ray trace.

INTRODUCCION

La importancia de los computadores en la investigación es ampliamente reconocido en todas las disciplinas de la ciencia. En la última década, con la aparición de muchas facilidades de cómputo, se ha desarrollado la física computacional como una poderosa componente que ha cambiado en forma radical la forma de estudiar esta ciencia tanto teórica como experimental [1]. Podemos experimentar sin lugar a ninguna duda, que la revolución computacional actual cambiará la ciencia y la sociedad en forma tan dramática como lo hizo la revolución industrial. Hoy, con la ayuda de métodos computacionales podemos trabajar procesos complicados de la naturaleza en un tiempo relativamente corto para tener ideas precisas y acertadas acerca de su comportamiento cuantitativo, lo que nos permite hacer mejores predicciones de los fenómenos naturales [2].

En la acústica oceánica, el impacto de los computadores a partir de mediados de los años 70 es evidente como se desprende del crecimiento casi exponencial del desarrollo y uso de modelos numéricos para la explicación y predicción de la propagación acústica [3]. Los modelos computacionales en la oceanografía se han convertido en herramientas esenciales de la investigación, y la disciplina de la acústica computacional es hoy en día una de las ramas más importantes de la ciencia de la acústica oceánica.

Sólo mediante la aproximación numérica es posible incluir la complejidad total del problema acústico con el fin de desarrollar experimentos rápidos y económicos en vez de experimentos oceánicos reales.

En esta contribución se presenta luego de una introducción teórica, un programa para la simulación de señales acústicas basado en el método de rayos. El código de cómputo fue desarrollado para el curso introductorio de Acústica Computacional, dictado en la Escuela Naval Almirante Padilla.

MODELOS NUMERICOS

El desarrollo de los modelos numéricos en la acústica sigue el patrón usual que se tiene en todas las ciencias y que se caracteriza por una combinación de las necesidades y de los recursos disponibles. Se puede afirmar que hay una correlación muy estrecha entre el desarrollo de los modelos computacionales y el avance de las ventajas de cómputo.

El término de modelos matemáticos en el área de la acústica se refiere a los algoritmos y programas de cómputo que permiten obtener soluciones aproximadas de la ecuación de ondas para la propagación del sonido en el medio oceánico. La diversidad de los modelos desarrollados se fundamenta en la necesidad de cubrir de manera eficiente las bajas y altas frecuencias de la señal acústica, medios marinos que pueden o no depender del rango y de los diferentes tipos de fondos y estados del mar [4].

En la elección y empleo de un modelo numérico debe tenerse en cuenta la precisión de los cálculos, el tiempo de ejecución y la facilidad de uso que éstos involucran.

Para situar al lector en el tema, se discutirán brevemente las diferentes aproximaciones que permiten solucionar la ecuación de ondas, para luego abordar el problema de la propagación por el método de rayos.

Como punto de partida para los problemas de propagación acústica submarina, se considera la ecuación lineal de ondas:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

donde p es la presión de la señal acústica, c la velocidad de propagación en el medio oceánico que depende de la salinidad, la temperatura, la profundidad y del rango (distancia horizontal). $f(\mathbf{r}, t)$ representa la fuente que produce la señal con una frecuencia determinada.

Mediante el cambio de variable

$$p(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega t} p(\mathbf{r}), \quad f(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega t} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_f) \quad (2)$$

se obtiene la ecuación *simplificada* de ondas también denominada ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 p - \frac{\omega^2}{c^2} p = -\delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_f) \quad (3)$$

Por simplicidad hemos considerado la fuente de sonido $f(\mathbf{r}, t)$ oscila con una frecuencia ω , es puntual y está situada en el punto \mathbf{z}_f .

En principio se puede sugerir de una manera natural la solución de esta ecuación mediante técnicas numéricas tales como el método de diferencias finitas, pero esto nunca se hace debido a que el problema es, desde el punto de vista computacional, prácticamente intratable debido al elevado número de puntos requeridos para la representación de la presión. Por esta razón se han desarrollado un gran número de métodos numéricos con el fin de hallar aproximaciones a la solución. Estas pueden ser enmarcadas dentro de los siguientes modelos:

Métodos de la integral espectral
 Modos normales
 Modelo de la ecuación parabólica
 Teoría de rayos

MÉTODOS DE LA INTEGRAL ESPECTRAL

Si suponemos que la velocidad del sonido sólo depende de la profundidad $c(z)$ (independiente del rango), se tiene una gran simplificación para la determinación de la solución de la ecuación de Helmholtz debido a que se elimina una variable. El método consiste en desarrollar la transformada de Fourier-Bessel para la presión:

$$\hat{p}(\mathbf{k}, z) = \int_0^{\infty} p(r, z) J_0(\mathbf{k}r) r dr \quad (4)$$

que al reemplazarse en la ecuación (3) se obtiene:

$$\frac{d^2 \hat{p}}{dz^2} = \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2 \right) \hat{p} = \delta(z - z_f) \quad (5)$$

Si a manera de ejemplo se considera una liberación de la presión en la superficie y un fondo oceánico rígido con profundidad D , las condiciones de frontera adecuadas para solucionar (5) son:

$$\hat{p}(0) = 0, \quad \left. \frac{d\hat{p}}{dz} \right|_D = 0 \quad (6)$$

Una vez hallada la solución numérica del problema (5-6), es necesario realizar la transformada inversa de Fourier-Bessel para hallar nuevamente la presión:

$$p(r, z) = \int_0^{\infty} \hat{p}(\mathbf{k}, z) J_0(\mathbf{k}r) k dk \quad (7)$$

Este procedimiento es lo que se denomina una representación integral espectral. Si además se hace la aproximación asintótica de la función de Bessel $J_0(\mathbf{k}r)$ para grandes distancias se obtiene:

$$p(r, z) \approx \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi r}} \int_0^K p(\mathbf{k}, z) e^{ikr} \sqrt{k} dk \quad (8)$$

que se puede evaluar por el procedimiento de transformada rápida de Fourier (FFT). K es el valor hasta el cual $p(\mathbf{k}, z)$ es significativamente diferente de cero.

El método fue desarrollado originalmente por Marsh y refinado por DiNapoli y Devenport en 1970 (4) y en el presente hay numerosas variaciones y modificaciones del mismo. La

ventaja de este procedimiento se fundamenta en que es esencialmente exacto. Las únicas aproximaciones que involucra este método provienen de los métodos numéricos para la evaluación de las transformadas y del método de integración del problema de frontera {5-6}.

MODOS NORMALES

Los métodos de modos normales han sido utilizados desde finales de los años 40 [6]. Hoy en día hay un gran número de variaciones en donde es posible incluir características muy específicas del fondo marino.

La deducción de las ecuaciones del modelo se fundamenta en la técnica analítica estandar de la separación de variables para la ecuación de Helmholtz:

$$p(r, z) = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(z) R_j(r) \quad (9)$$

Al hacer la sustitución de esta expresión en la ecuación (3) escrita en coordenadas cilíndricas, se encuentra el problema de valores propios descrito por

$$\frac{d^2 Z_j}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_j^2 \right) Z_j = 0 \quad (10)$$

con las condiciones de frontera

$$Z_j(0) = 0, \quad \frac{dZ_j}{dz} \Big|_D = 0 \quad (11)$$

Para el caso de liberación de presión en la superficie y una reflexión en un fondo rígido situado a la profundidad D. La solución de (10 - 11) tiene un número infinito de soluciones que son denominadas modos normales. Ellos son caracterizados por una función $Z_j(z)$ y la constante k_j^2 denominada valor propio (Las "frecuencias" asociadas con estos valores propios dan los números de onda asociados con la propagación modal.

Las ecuaciones para $R_j(r)$ satisfacen:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_j}{dr} \right) + k_j^2 R_j = -Z_j(z_f) \frac{\delta(r)}{r} \quad (12)$$

cuya solución está dada en términos de la función de Hankel:

$$R_j(\mathbf{r}) = Z_j(z_f)H_o^{(1)}(\mathbf{k}_j\mathbf{r}) \quad (13)$$

Al reemplazar en (9) se obtiene la presión p:

$$p(\mathbf{r},\mathbf{z}) = \frac{i}{4} \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(z_f)Z_j(z)H_o^{(1)}(\mathbf{k}_j\mathbf{r}) \quad (14)$$

Si en esta expresión se considera el desarrollo asintótico de la función de Hankel $H_o^{(1)}(\mathbf{k}_j\mathbf{r})$ para grandes distancias se obtiene

$$p(\mathbf{r},\mathbf{z}) \approx \frac{ie^{-\pi/4}}{\sqrt{8\pi r}} \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(z_f)Z_j(z) e^{ikr} / \sqrt{k_j} \quad (15)$$

En general se encuentra que esta solución es precisa para grandes distancias dependiendo del número de modos que se tomen en la sumatoria. Para distancias cortas es más adecuada la solución hallada por el método espectral integral descrito anteriormente.

Los métodos de los modos normales dan soluciones para velocidades del sonido independientes del rango. En el caso de $\mathbf{c}(\mathbf{z},\mathbf{r})$ (dependiente del rango) se han desarrollado métodos tales como la teoría de modos adiabáticos [7] y la teoría de modos acoplados [8]. Las complicaciones numéricas de estos métodos es muy grande pero se obtienen resultados muy precisos.

METODO DE LA ECUACION PARABOLICA

Este modelo fue desarrollado originalmente por Tappert [9] en la década del 70. La idea es proponer una solución de la ecuación de Helmholtz en la forma

$$p(\mathbf{r},\mathbf{z}) = u(\mathbf{r},\mathbf{z})H_o^{(1)}(\mathbf{k}_0\mathbf{r}) \quad (16)$$

siendo \mathbf{k}_0 un número de onda de referencia. Al reemplazar esta solución en (3) se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2i\mathbf{k}_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{k}_0^2(n^2 - 1)u + \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{z}^2} = 0 \quad (17)$$

$\mathbf{n} = \mathbf{c}(\mathbf{z},\mathbf{r})/c(\mathbf{r},\mathbf{z})$ y se denomina índice de refracción.

Si consideramos un problema de rango independiente con un ángulo de emisión de la señal muy estrecho, es válido despreciar el primer término de la ecuación que se denomina aproximación paraxial. Así obtenemos la ecuación parabólica:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = ik_0 \frac{n^2 - 1}{2} u + \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{18}$$

que es relativamente fácil de solucionar por los métodos convencionales utilizados en los problemas de difusión.

TEORIA DE RAYOS

Estos modelos de rayos son bastante utilizados en la predicción acústica submarina. En los años 60 eran prácticamente, junto con los métodos de modos normales, los únicos utilizados. Hoy en día el método del trazado de rayos es poco utilizado por la comunidad científica en la investigación de acústica submarina, debido a que sólo tiene validez a altas frecuencias. Sin embargo, estos métodos son de amplio uso en los desarrollos operacionales navales donde la velocidad de cómputo es un factor crítico y en donde la incertidumbre de los datos del medio coloca restricciones mucho más severas que la precisión que se desea obtener.

Un estudio profundo de éste último método ha permitido interpretar muchos de los resultados de los métodos mencionados anteriormente.

Para obtener las ecuaciones de los rayos, se busca la solución de la ecuación de Helmholtz en la forma de una serie de rayos:

$$p(\mathbf{x}) = e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j} \tag{19}$$

Matemáticamente esta serie es divergente, pero en ciertos casos se puede demostrar que es una aproximación asintótica de la solución exacta. Sustituyendo en la ecuación de Helmholtz y comparando los términos en ω obtenemos:

$$O(\omega^2): \quad |\nabla\tau|^2 = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \tag{20}$$

$$O(\omega): \quad 2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + (\nabla^2\tau)A_0 = 0$$

$$O(\omega^{1-j}): \quad 2\nabla\tau \cdot \nabla A_j + (\nabla^2\tau)A_j = -\nabla^2 A_{j-1} \quad (j=1,2,\dots) \tag{21}$$

La primera de estas ecuaciones es la ecuación eikonal y las restantes son denominadas ecuaciones de transporte. El considerar que el problema de propagación se reduce a solucionar sólo la ecuación eikonal es equivalente a considerar una aproximación de alta frecuencia.

La ecuación eikonal se soluciona introduciendo una familia de rayos que son definidos como perpendiculares a los frentes de onda en donde \mathbf{r} es constante (ver figura 1). Se encuentra luego de algunas manipulaciones algebraicas que las ecuaciones de los rayos están dadas por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= c \xi(\mathbf{s}) & \frac{d\xi}{ds} &= -\frac{1}{c^2} \frac{dc}{d\mathbf{r}} \\ \frac{dz}{ds} &= c \zeta(\mathbf{s}) & \frac{d\zeta}{ds} &= -\frac{1}{c^2} \frac{dc}{dz} \end{aligned} \quad (22)$$

donde $[\mathbf{r}(\mathbf{s}), \mathbf{z}(\mathbf{s})]$ representa la trayectoria del rayo en el plano (\mathbf{r}, \mathbf{z}) . Las condiciones iniciales para determinar la trayectoria del rayo están dadas por la posición de la fuente emisora y el ángulo θ con el cual sale el sonido.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_f \quad \mathbf{z} = \mathbf{z}_f \quad \xi = \frac{\cos(\theta)}{c(0)}, \quad \zeta = \frac{\sin(\theta)}{c(0)} \quad (23)$$

Si la velocidad del sonido es independiente de la frecuencia, entonces la trayectoria de los rayos también lo es.

El tipo de gráfica que se obtiene como solución del problema sólo muestra la dirección en que la energía se propaga pero no el campo de la presión ni la pérdida por transmisión (ver figuras 2, 3, 4). Para obtener el campo de presión necesitamos asociar a cada rayo una fase y una amplitud.

Dado que en la deducción de las ecuaciones de rayos se hizo la aproximación de altas frecuencias, es natural preguntarse qué tan alta debe ser para que el modelo de rayos tenga validez. Como regla empírica se acepta que la longitud de onda asociada debe ser más pequeña que cualquier escala física del problema como son la profundidad del fondo, características batimétricas y características internas tales como los ductos de superficie. Las ecuaciones para los rayos (22) se han escrito utilizando la longitud de arco \mathbf{s} como variable independiente. Para efectuar los cálculos de la trayectoria del rayo en el medio es necesario hacer un pequeño arreglo para tener a \mathbf{z} como variable independiente. Al hacer esto, las ecuaciones se reducen a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dz^2} = \left[1 + \left[\frac{d\mathbf{r}}{dz} \right]^2 \right] \left[-\frac{c_r}{c} + \frac{c_z}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right] \quad (24)$$

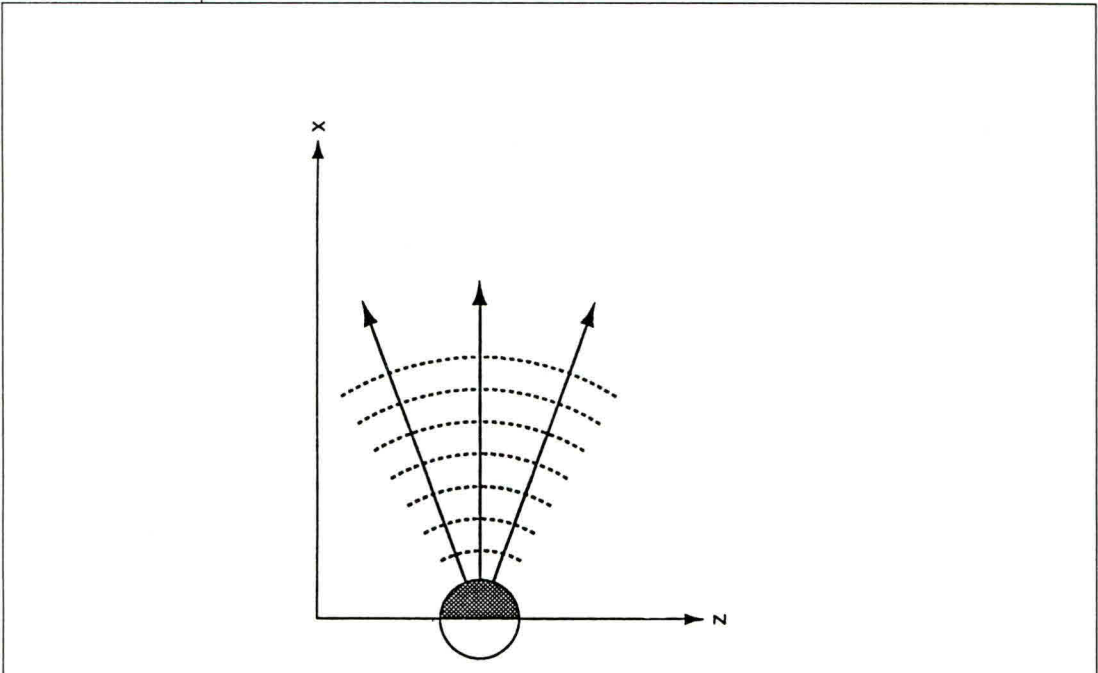


Figura 1.
La línea punteada describe los frentes de onda r es constante. Los rayos son definidos como trayectorias perpendiculares a los frentes de onda.

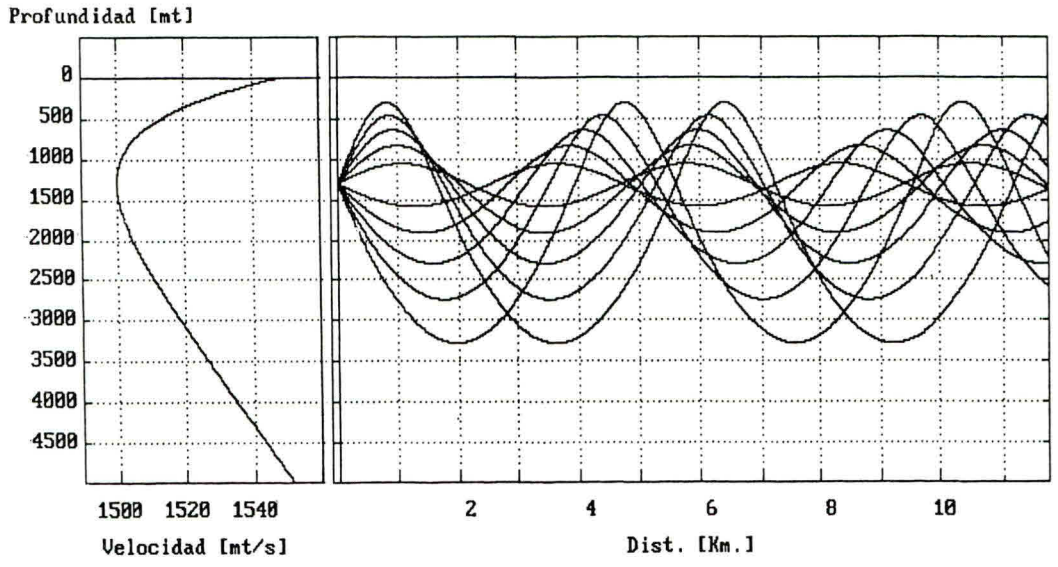


Figura 2.
(Izquierda) perfil de Munk para la velocidad del sonido. (Derecha) Diagrama de rayos para un perfil de velocidad de Munk. La fuente se coloca a 1300 mts.

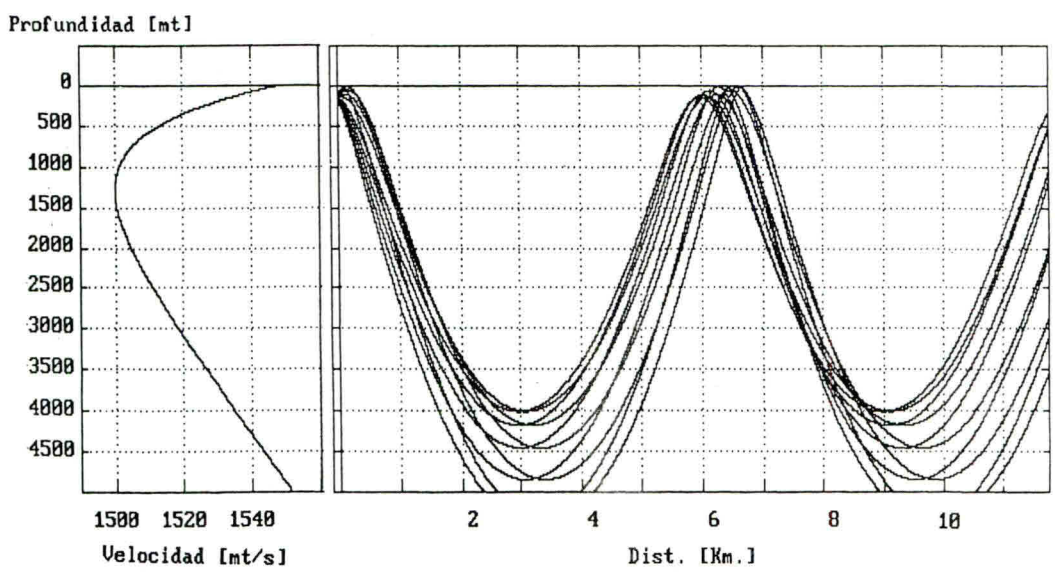


Figura 3.
(Izquierda) Perfil de Munk para la velocidad del sonido. (Derecha) Diagrama de rayos para un perfil de velocidad de Munk. La fuente se coloca a 150 mts.

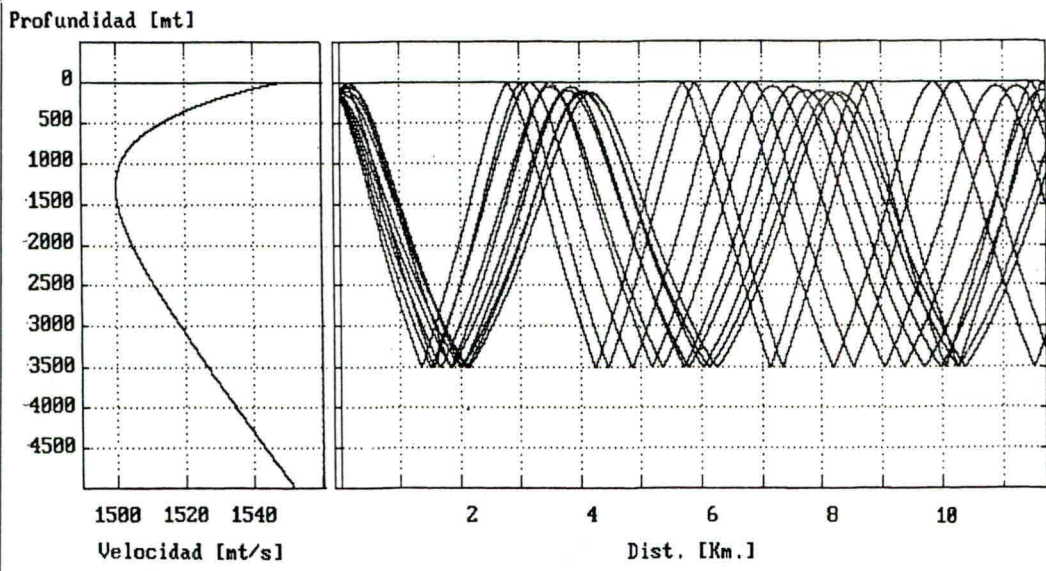


Figura 4.
(Izquierda) Perfil de Munk para la velocidad del sonido. (Derecha) Diagrama de rayos para un perfil de velocidad de Munk. El fondo es plano a una distancia de 3500 mts., la fuente se coloca a 150 mts.

en donde c_r y c_z representan las derivadas de $c(z,r)$ con respecto a r y a z . Esta ecuación nos permite trazar las trayectorias del sonido para el caso en el que la velocidad del sonido dependa tanto de la profundidad como del rango. Si se considera que la velocidad del sonido es independiente del rango, la ecuación se reduce a:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \left[1 + \left[\frac{dr}{dz} \right]^2 \right] \left[\frac{c_z}{c} \frac{dr}{dz} \right] \quad (25)$$

que puede ser integrada por métodos analíticos para obtener:

$$r(z) = r(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{ac}{\sqrt{1 - a^2 c^2}} dz \quad (26)$$

donde a es una constante. Esta expresión representa también la forma integral de la ley de Snell [10].

DETERMINACION NUMERICA DE LAS TRAYECTORIAS

La manera más sencilla de escribir un programa de cómputo para la determinación de las trayectorias de los rayos en un medio estratificado es hacer uso de solución directa de la ecuación (25) descrita en (26).

El programa para determinar la trayectoria de los rayos se escribió en FORTRAN 77 utilizando como rutina de integración de la ecuación diferencial el método de Runge-Kutta de cuarto orden [11]. Como ejemplo de un perfil de velocidad de sonido se consideró la relación de Munk [12] que representa una curva idealizada para la variación de la velocidad del sonido con la profundidad z . La forma del perfil es:

$$c(z) = A[1.0 + \epsilon(\bar{z} - 1 + e^{-\bar{z}})] \quad , \quad \bar{z} = \frac{2(z - B)}{B} \quad (27)$$

donde B representa la posición donde la velocidad es mínima con valor A .

El programa determina las trayectorias de rayos en un canal oceánico limitado por la superficie y un fondo rígido plano a la profundidad D . La fuente está colocada a una profundidad z_f y los rayos son proyectados en un cono de $\pm 10^\circ$ respecto a la horizontal. Dependiendo de la posición de la fuente, las trayectorias de los rayos pueden oscilar dentro del canal oceánico sin chocar con las fronteras. Sin embargo, si se desea tener en cuenta las reflexiones en la superficie o el fondo, es necesario considerar una manera de interrumpir la solución numérica de la ecuación cuando el rayo golpea la frontera. En el programa cuando el rayo alcanza una de las fronteras del canal, se refleja con un ángulo

igual al de incidencia; lo cual obliga a reiniciar nuevamente la integración numérica. Sin embargo es posible considerar diferentes tipos de interacción, dependiendo del tipo de fondo.

El programa debe ser compilado con la ayuda de un compilador FORTRAN profesional. Como no hay un sistema gráfico estándar para el lenguaje FORTRAN, se desarrolló una librería gráfica que se comunica directamente con el hardware gráfico mediante el software del sistema para producir las gráficas de las trayectorias.

La figura 2 muestra el resultado para la propagación con $c(z)$ dado por (27) siendo $A=1500$, $B=1300$ y $\epsilon=0.00737$. La forma del perfil de velocidad se ilustra a la izquierda de la figura. La fuente de sonido se colocó a una profundidad de 1300 metros que corresponde a la posición donde la velocidad del sonido logra su valor mínimo. Para este caso no se consideró un fondo oceánico. Las trayectorias para ángulos de emisión en un cono de 20° están confinadas al canal denominado SOFAR. Se observa que ninguna de las trayectorias alcanza la superficie o grandes profundidades. En este canal SOFAR la transmisión del sonido se hace por refracción debido a la forma del perfil $c(z)$, lo que significa que la energía radiada por la fuente se puede propagar grandes distancias sin pérdidas apreciables, pues el sonido no interactúa con la superficie ni con el fondo.

Posteriormente en la figura 3 con las mismas condiciones de la figura anterior, pero con la fuente a una profundidad de 150 metros, las trayectorias de los rayos muestran zonas de sombra que corresponden a las regiones en donde no hay rayos y por lo tanto la intensidad del sonido es cero. Además presenta una zona de convergencia a una distancia cercana a los 6 km con un ancho de casi 1 km. En esta región donde hay mayor intensidad del sonido debido a que se concentran casi todos los rayos. A diferencia de la figura anterior, los rayos para todos los ángulos de emisión alcanzan grandes profundidades. A partir de este hecho se puede afirmar que para fuentes casi superficiales se requiere un tratamiento bastante preciso del fondo oceánico con el fin de tener un diagrama de rayos correctos.

En la figura 4, con el mismo perfil de velocidad del sonido de las gráficas anteriores, se simuló un fondo oceánico plano a una profundidad de 3500 mt. Este fondo se tomó como un reflector perfecto con la única finalidad de hacer chequeos del programa. Si la fuente se coloca a una profundidad de 1300 mt, la trayectoria de los rayos es idéntica a la presentada en la figura 2, debido a que éstos no interactúan con el fondo ni con la superficie. En el caso de una fuente ubicada como en la figura 3, los rayos alcanzan el fondo y por el efecto del rebote se destruyen las zonas de convergencia y las zonas de sombra. En este caso el patrón de las trayectorias es completamente diferente al de la figura 3. esto confirma la importancia del tratamiento del fondo oceánico para propagaciones casi superficiales en donde no existen ductos de superficie.

Aunque los resultados de la propagación utilizando la teoría de rayos pueden ser interpretados de una manera sencilla, es conveniente hacer una breve comparación con los calculados directamente de la ecuación de ondas.

La teoría de ondas ofrece una solución completa del problema mientras que la teoría de rayos no considera problemas que involucran difracción o dispersión tal como lo produce el sonido en una zona de sombra. Esto representa una de las limitaciones serias del método.

Mientras la teoría de ondas es válida para toda condición de gradiente de la velocidad del sonido, la teoría de rayos es válida sólo cuando $(\Delta c / c) / \Delta z < 1/\lambda$. Lo que equivale a decir que el gradiente de la velocidad debe ser, en cualquier parte, menor que la frecuencia.

Las soluciones de la ecuación de ondas aunque sean exactas son difíciles de manejar. Esto contrasta con la teoría de rayos que produce un diagrama de rayos de muy fácil interpretación.

Mediante la teoría de ondas no se puede manejar las condiciones de frontera reales que se presentan en el océano, mientras que en la teoría de rayos se puede hacer de una manera sencilla. Además la teoría de ondas tiene en cuenta la función de la fuente mientras que la teoría de rayos no permite decir nada acerca de la naturaleza de la fuente empleada.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer al C.C. J. Alberto Bejarano por sus comentarios y motivación para estudiar el tema de la propagación acústica submarina, a los oficiales del curso No. 20 de Oceanografía de la Escuela Naval Almirante Padilla por las sugerencias para intentar hacer un programa real aplicable a las condiciones de nuestros mares territoriales y al Departamento de Física de la Universidad Nacional por permitirme el tiempo para dedicarme a estos temas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Physics through the 1990's: Scientific interfaces and technological applications. Edited by National Academic Press. Washington (1987).
- [2] Computersimulation in der Physik. 20 IFF-Freienkurz. Kernforschungsanlage Jülich. germany (1989).
- [3] Oceanography and acoustics prediction and propagation Models. Editors Allan Robinson, Ding Lee. American Institute of Physics. New York 1994.
- [4] F.R. DiNapoli, D.L. Davenport. "Numerical models of underwater acoustic propagation" in Ocean Acoustic. Edited by J.A. Santo. Springer Verlag, New York (1979).

- [5] H. SMITH; F.B. JENSEN. "A full wave solution for propagation in multilayered viscoelastic media with applications to Gaussian beam reflection at fluid solid interfaces" *J. Acous. Soc* 83, 571 (1988).
- [6] C.L. PEKERIS. "Theory of propagation of explosive sound in shallow water" *Geol. Soc. Am. mem* 27 (1948).
- [7] M.B. PORTER, F.B. JENSEN, C.M. FERLA., "The problem of energy conservation in one way models" *J. Acoust. Soc. Am.* 89, 1058 (1991).
- [8] A.D. PIERCEE., "Extensions of the method of normal modes to sound propagation in an almost stratified medium". *J. Acoust. Soc. Am.* 37, 19 (1965).
- [9] F.D. TAPPERT., "The parabolic approximation method in wave propagation and underwater acoustics" Edited by J.B. Keller. *Lecture notes in Physics vol 70* (Springer - Verlag, Berlin 1977).
- [10] M. ALONSO, E. FINN., "Fundamental university physics". Vol 2 Addison-Wesley series in Physics (1967).
- [11] W.H. PRESS, B.P. FLANNERY, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING., "Numerical recipes" Cambridge University Press (1986).
- [12] W.H. MUNK., "Sound channel in an exponentially stratified ocean with applications to SOFAR" *J. Acoust. Soc. Am.* 55 220 (1974).