

SOLUCION DE LA ECUACION DEL SONIDO PARA EL CASO DE UN FONDO NO-RIGIDO(*)

Hernán Estrada B.¹

División de Oceanografía Operacional, Centro de Investigaciones Oceanográficas e Hidrográficas, Cartagena de Indias D. T. y C., Colombia

1. INTRODUCCION

La cantidad de energía de una señal acústica periódica que llega al fondo oceánico depende de diferentes factores tales como la profundidad del fondo, la frecuencia de la emisión y la localización de la fuente. También es importante el perfil de velocidad del sonido en el océano debido a que dependiendo de su estructura se forman ductos acústicos de sonido que pueden atrapar gran parte de la energía emitida por la fuente. Cuando se considera que el fondo es muy profundo, la interacción de las ondas de sonido con éste puede ser de poco interés y en tal caso, el fondo se modela como una superficie acústicamente rígida. Sin embargo, para este caso de fuentes de sonido a bajas frecuencias o fondos oceánicos de mares someros o canales de sonido muy débiles, la interacción del sonido con el fondo adquiere una gran importancia. Debido a esto, es necesario modelar en forma más detallada el proceso de la interacción del sonido con los materiales del fondo.

El considerar el rango de la baja frecuencia de emisión para la fuente tiene como ventaja la minimización de efectos acústicos tales como los producidos por la dispersión por volumen, pero por otro lado, presenta la dificultad de considerar modelos geoacústicos para la interacción del sonido con el fondo, que involucra parámetros que algunas veces no están muy bien determinados.

El desarrollo de modelos de propagación para señales de baja frecuencia en el estudio de la acústica oceánica ha tenido un continuo avance en los últimos 10 años y ha estado ligado íntimamente con los adelantos de la tecnología computacional. Hasta mediados de los 70 la única técnica práctica para la solución de problemas de propagación en acústica submarina estaba fundamentada en la técnica de los rayos, (Urick, 1983). Esta técnica, aunque eficiente computacionalmente, sólo es válida para muy altas frecuencias (estrictamente

infinitas). Estos métodos de rayos empleados como solución aproximada de la ecuación de ondas se utilizan hoy en día sólo para indicar esquemáticamente características generales de la propagación acústica pero son poco empleados para predecir las pérdidas de atenuación de la señal.

A principios de los años 70 empezaron a aparecer en el mercado equipos de cómputo muy eficientes que estimularon el desarrollo y cálculo de soluciones precisas de la ecuación de onda dependientes de la frecuencia; es por ello que ahora procedimientos tales como: los modos normales, ecuación parabólica o las técnicas de integración dependientes del número de onda, son temas de discusión en la literatura de propagación acústica submarina, (Jensen, 1954).

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las propiedades de los materiales del fondo de nuestros mares pueden diferir sustancialmente dependiendo de su localización geográfica. Cuando en el fondo se tienen materiales "suaves" o "blandos" tales como lodos o arenas, y se toma en consideración la poca información disponible sobre la estratificación y propiedades detalladas, se puede considerar, para efectos de modelación acústica que estos fluidos de densidad ρ_f permiten que la energía de la señal se transmita en la interfase agua-fondo introduciendo mecanismos adicionales de pérdida en el proceso de la propagación acústica.

En este trabajo, los fluidos se consideran como una capa de espesor semi-infinita. Sin embargo, en modelos geoacústicos más reales, se puede pensar que forman capas superpuestas con diferentes espesores que descansan sobre un fondo rígido semi-infinito en los que además es importante la propagación de ondas de cizallamiento, (Porter Reiss, 1985).

En el desarrollo del proyecto sobre la propagación acústica en nuestros mares, el CIOH de la Armada

(*) Trabajo realizado durante su año sobáctico en el CIOH

(1) Dr. Rec. Nat. Deport. Departamento de Física Universidad Nacional de Colombia, Santa Fé de Bogotá D.C.

Nacional desarrolló en el segundo semestre de 1995 un programa de cómputo denominado PROPAS (versión 1.0) para la predicción acústica que permite determinar, además de la trayectoria de los rayos acústicos, las pérdidas por transmisión para una guía oceánica calculando en forma exacta la solución de la ecuación de ondas para un mar cuyo fondo es plano y rígido, (Estrada, 1995).

Para complementar el programa de predicción PROPAS 1.0 se ha desarrollado recientemente una nueva versión del mismo (PROPAS 2.0) en el que se incluye información acerca de la interacción con el fondo oceánico. Para llevar a cabo esta tarea, el fondo se considera como un medio semi-infinito que tiene una densidad ρ_f y una velocidad de propagación del sonido constante c_f . La condición de acople en la interfase agua-fondo es:

$$f(k_r^2)\Psi(D) + \frac{g(k_r^2)}{\rho} \left. \frac{d\Psi}{dz} \right|_D = 0$$

El método que se adoptó para solucionar la ecuación de ondas con el fin de determinar las pérdidas por transmisión es de modos normales que es un procedimiento estándar que se emplea para resolver los problemas de propagación acústica, (Miller, 1980).

Los números de propagación k_r así como los modos normales $\Psi(z)$ aparecen al solucionar la ecuación de ondas como un problema de valores propios, (Porter Reiss, 1985). Dado que en muy pocas ocasiones es posible resolver estos problemas en forma analítica, es necesario disponer de algoritmos numéricos eficientes para la determinación lo más precisa posible de los valores propios.

El uso de métodos numéricos adecuados debe impedir errores tales como los corrimientos de fase en la dependencia del rango del campo acústico. Estos errores dan lugar por lo general a una rápida degradación de la representación de los modos normales cuando se incrementa la distancia a la fuente.

En el informe presentado al CIOH en noviembre de 1995 sobre la descripción del programa PROPAS 1.0, (Estrada, 1995) y en el trabajo de Méndez, (Méndez, 1995) se ha mostrado de manera detallada el método de cálculo de los modos normales cuando se considera

la propagación en una guía oceánica con velocidad del sonido que no depende del rango y en la que el fondo es rígido.

Con ayuda de este procedimiento se solucionó la ecuación diferencial de valores propios.

$$\frac{d^2\Psi_r}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_r^2 \right) \Psi_r = 0 \quad (1)$$

Con las condiciones de fronteras.

$$\Psi_r(0) = 0, \quad \left. \frac{d\Psi_r}{dz} \right|_D = 0 \quad (2)$$

Que representan el caso de la liberación de presión en la superficie y una reflexión especular en un fondo rígido situado en la profundidad D. El esfuerzo principal que se hizo en PROPAS 1.0 al solucionar la ecuación anterior, fue desarrollar programas numéricos eficientes para hallar rápidamente las funciones y valores propios.

La ecuación de modos normales dada por (1 - 2) es un problema clásico de valores propios de Sturm-Liouville. La estrategia numérica usual para encontrar los valores propios consiste en elegir un valor propio de ensayo y generar una solución integrando la ecuación diferencial como un problema de valor inicial. Este valor inicial corresponde a una de las condiciones de frontera. Si la solución resultante no satisface la otra condición de frontera, cambiamos el valor propio de ensayo e integramos nuevamente para ver si se satisface la segunda condición. Este proceso se repite tantas veces hasta que el valor propio de ensayo satisfaga la otra frontera dentro de una tolerancia determinada. Este procedimiento se denomina en la literatura de métodos numéricos como la "técnica del disparo", (Press, 1985).

En los desarrollos iniciales del programa PROPAS 1.0, se encontró que la técnica del disparo requería algunas modificaciones debido a que presenta una gran inestabilidad numérica cuando la solución se aproxima al final del rango de integración originando un crecimiento exponencial de la solución. Luego de un estudio detallado, se concluyó que para eliminar esta dificultad en los problemas donde la velocidad del sonido presenta dos puntos de retorno como sucede cuando se considera propagación en aguas profundas, se debía considerar la idea de utilizar dos veces el método del disparo uno en cada extremo

del rango para luego empatar logarítmicamente la solución en algún punto determinado.

Al considerar el caso de la interacción del sonido con el fondo, el modelo que se desarrolló y que representa el fundamento del programa PROPAS 2.0 consiste en solucionar la ecuación de Helmholtz para una fuente monocromática de frecuencia ω situada en el punto z_f en el semi-espacio debajo de la superficie:

$$\nabla^2 p - \frac{\omega^2}{c^2} p = -\delta(z - z_f) \quad (3)$$

La deducción de las ecuaciones del modelo se fundamenta en la técnica analítica estándar de la separación de variable para la ecuación de Helmholtz, (Stakgold, 1979):

$$p(r, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j(z) R_j(r) \quad (4)$$

Al hacer la sustitución de esta expresión en la ecuación (3) escrita en coordenadas cilíndricas, se encuentra el problema de valores propios descrito por:

$$\frac{d^2 \Psi_j}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_j^2 \right) \Psi_j = 0 \quad 0 \leq z < \infty \quad (5)$$

La velocidad del sonido $c(z)$ es función de la profundidad y para el presente estudio no se ha considerado su dependencia con el rango. Como el interés está sólo en el dominio finito comprendido entre la superficie y la profundidad del fondo D , se construye una condición de frontera artificial que reemplaza la propagación atenuada del sonido en el material del fondo.

Si se considera que el material que conforma el fondo marino de densidad ρ_f tiene profundidad infinita y que el sonido se propaga con velocidad constante c_f , la solución de la ecuación (5) que denominamos Ψ_{fondo} , tiene la forma de una onda que se atenúa y se representa como:

$$\Psi_{fondo}(z) = B e^{-\gamma z} \quad \text{con} \quad g = \sqrt{k_r^2 - \left(\frac{\omega}{c_f}\right)^2}$$

como en cualquier punto de la guía se requiere que tanto la presión acústica como la velocidad normal sean continuas, tenemos que en la interfase:

$$\Psi_{fondo}(D) = B e^{-\gamma D}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\Psi_{fondo}}{dz} \Big|_D = -B \frac{g e^{-\gamma D}}{\rho_f}$$

Al dividir estas ecuaciones, se encuentra que la solución de (5) en la región comprendida entre la superficie y el fondo D debe satisfacer la condición de frontera:

$$f(k_r^2) \Psi(D) + \frac{g(k_r^2)}{\rho} \frac{d\Psi}{dz} \Big|_D = 0 \quad (6)$$

donde,

$$f(k_r^2) = 1, \quad g(k_r^2) = \rho_f / \sqrt{k_r^2 - \left(\frac{\omega}{c_f}\right)^2} \quad (7)$$

Así en resumen, el problema de la determinación de los modos se ha convertido en hallar las soluciones de:

$$\frac{d^2 \Psi_j}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_j^2 \right) \Psi_j = 0$$

$$\Psi_j(0) = 0$$

$$f(k_r^2) \Psi(D) + \frac{g(k_r^2)}{\rho} \frac{d\Psi}{dz} \Big|_D = 0 \quad (8)$$

con f y g dados por (7).

Observamos que el problema (5) se ha reducido al dominio finito $0 \leq z \leq D$ pero al precio de considerar una condición de frontera que depende del valor propio. En cierta forma esta condición de frontera en el fondo marino es no-local en el sentido que el campo de la presión acústica está determinado por la forma de la frontera pero por otro lado, define los valores que esta debe tomar.

La dificultad que se encuentra al reducir la solución del problema de la propagación acústica de un dominio infinito a un dominio finito es que no podemos garantizar que el conjunto de funciones propias solución de (8) sea un conjunto completo ortogonal como lo es el caso del problema estándar de Sturm-Liouville que aparece para un fondo rígido. Se debe tener en cuenta para estudios posteriores que el valor propio que aparece en el radicando de $g(k^2)$ introduce una ramificación en el plano complejo que es de interés en el movimiento de los valores propios cuando se consideran variaciones en los parámetros del problema.

3. SOLUCION DE LA ECUACION DE VALORES PROPIOS.

En este trabajo se emplea el método de las diferencias finitas para hallar la solución del problema (8). Esto corresponde a una estrategia numérica diferente a la

$$p(r,z) \approx \frac{ie^{-\pi/4}}{\sqrt{8\pi r}} \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j(z_f) \Psi_j(z) e^{ikr} / \sqrt{k_j} \quad (16)$$

que corresponde a la aproximación denominada de campo lejano. Esta aproximación es equivalente a considerar que la propagación tiene geometría cilíndrica.

Con la información obtenida para el campo de presión $p(r,z)$, el programa PROPAS 2.0 determina el parámetro de la pérdida por transmisión (Transmission loss) mediante:

$$TL(r,z) = -20 \log_{10} \left| \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j(z_f) \Psi_j(z) \frac{e^{ik_j r}}{\sqrt{k_j}} \right| \quad (17)$$

4. APLICACIONES DEL METODO

En esta sección se muestra la precisión, rapidez y versatilidad del método de las diferencias finitas para calcular los valores y funciones del problema de propagación del sonido cuando tenemos en cuenta un fondo no rígido.

Inicialmente para chequear el método consideramos la propagación de una señal acústica de frecuencia ω , el fondo está situado a una profundidad de 3000 mts. Y un perfil $c(z)$ dado por, (Munk, 1974):

$$c(z) = 1500 \left[1 + 0.00757(\bar{z} - 1 + e^{-\bar{z}}) \right]$$

$$\bar{z} = \frac{2(z - 1300)}{1300}$$

Con el ánimo de comparar la efectividad del procedimiento numérico, se considera un fondo rígido. En las tablas 1 y 2 se indican los valores propios calculados con la rutina utilizada en PROPAS 1.0 y los obtenidos por el algoritmo que utiliza las diferencias finitas.

Se observa que tanto a bajas como a altas frecuencias los dos procedimientos dan valores de valores propios con diferencias $\sim 10^{-5}$. Este chequeo garantiza la precisión del método de las diferencias finitas y es un chequeo adicional de la confianza de los resultados que se obtienen con los programas PROPAS 1.0 y su nueva versión PROPAS 2.0. El orden de la matriz tridiagonal empleada para alcanzar esta precisión es de 500 x 500.

Al considerar la solución del problema (9) se presenta

en la figura 1 una representación de $\det |A(k^2)|$ como función de k . En la región donde se presentan los valores propios su comportamiento es oscilatorio. Los valores propios corresponden a los ceros de esta función, y se encuentran comprendidos en la región:

$$\frac{\omega}{\max(c(z))} \leq k \leq \frac{\omega}{\min(c(z))}$$

la acumulación de los valores propios a la derecha de la gráfica corresponde a los valores propios de los primeros modos que se encuentran justo por encima del mínimo del perfil de la velocidad del sonido que para el caso considerado es de 1.500 m/seg. Físicamente, de todos los valores propios registrados en la gráfica, se consideran, según la relación anterior, los primeros siete modos. Estos modos están evidentemente atrapados por la guía oceánica.

En la figura 2 se muestran las funciones normalizadas de los modos 1 y 5. Se aprecia que cumplen las condiciones de frontera.

En la tabla 3 se registra a la derecha los valores propios calculados mediante el método de diferencias finitas para una señal con $\omega = 100$ y un fondo a la profundidad $D = 2000$ mts con $\rho_f = 2$ y una velocidad de propagación $c_f = 2000$ m/seg. Los valores propios del problema con los mismos parámetros pero tomando en cuenta un fondo rígido se encuentran a la derecha en la tabla. Se observa que los primeros modos no son afectados de manera significativa por el fondo, pero entre los modos altos no hay correlación ninguna. Esto nos demuestra que cierta parte de la energía de la señal acústica es acoplada con el fondo en la medida que algunos modos no son atrapados por el ducto oceánico.

En la figura 3 se grafica $\det |A(k^2)|$ en función de k tanto para el caso del problema que considera fondo fluido (línea continua) como para el caso de fondo rígido (línea a trazos). Se observa un corrimiento de los valores propios como resultado de la interacción del sonido con el fondo. Este corrimiento no es proporcional y es más evidente en los modos altos. Para hacer evidente el efecto del fondo se compara en la figura 4 las funciones propias de los modos 1 y 5. Se observa que la pendiente de la función propia para el problema que considera fondo rígido a la profundidad D es siempre cero, el valor que toma el modo para el caso de fondo no-rígido queda determinado por el valor que toma el valor propio. Finalmente en la figura 4 se muestra la comparación

de la pérdida de transmisión para el caso de la propagación con fondo (línea continua) y la propagación con fondo rígido (línea punteada). Se observa la disminución de la intensidad acústica de la señal para el caso en que se considera el fondo no-rígido. Esto es una consecuencia del mecanismo de absorción de la energía por el fondo oceánico. Aunque en la gráfica la diferencia que se observa es pequeña, se debe tener en cuenta que la escala vertical está en dB, por lo tanto, la diferencia en

intensidades es grande. Las oscilaciones que aparecen en la curva para el caso de fondo no-rígido se deben a que en el cálculo se consideraron todos los modos de oscilación que genera la solución de $\det|\lambda(k^2)|=0$. Adicionalmente, la razón de tener una intensidad acústica superior para el caso de fondo no-rígido en comparación con el caso rígido para los primeros 500 metros se origina en el hecho de haber considerado la expansión asintótica de la función de Hankel en el cálculo de la pérdida por transmisión.

TABLA 1 $\omega = 100$

modo	calc. con PROPAS 1.0	calc. Por dif. finitas
1	6.6600913E-2	6.6600915E-2
2	6.6471749E-2	6.6471755E-2
3	6.6345356E-2	6.6345371E-2
4	6.6221686E-2	6.6221702E-2
5	6.6101530E-2	6.6101449E-2
6	6.5988856E-2	6.5988383E-2
7	6.5882989E-2	6.5882700E-2

TABLA 2 $\omega = 1000$

modo	calc. con PROPAS 1.0	calc. por dif. finitas
1	6.6660065E-1	6.6660067E-1
2	6.6646888E-1	6.6646894E-1
3	6.6633740E-1	6.6633757E-1
4	6.6620621E-1	6.6620653E-1
5	6.6607532E-1	6.6607585E-1
6	6.6594472E-1	6.6594550E-1
7	6.6581442E-1	6.6581550E-1
---	---	---
62	6.5905579E-1	6.5913429E-1
63	6.5894120E-1	6.5902096E-1
64	6.5882849E-1	6.5890862E-1
65	6.5871795E-1	6.5879791E-1
66	6.5860794E-1	6.5868935E-1
67	6.5849511E-1	6.5858204E-1

TABLA 3

$c_f = 2000$ $\rho_f = 2$ $\omega = 100$

modo	con fondo	fondo rígido
28	5.0273428E-2	
27	5.1540379E-2	
26	5.2745092E-2	
25	5.3882499E-2	
24	5.4954768E-2	
23	5.5964781E-2	
22	5.6915382E-2	
21	5.7809203E-2	
20	5.8648634E-2	
19	5.9435824E-2	
18	6.0172697E-2	
17	6.0860970E-2	
16	6.1502171E-2	
15	6.2097648E-2	
14	6.2648585E-2	
13	6.3156010E-2	
12	6.3620830E-2	
11	6.4043930E-2	
10	6.4426477E-2	
9	6.4770668E-2	6.4868456E-2
8	6.5080809E-2	6.5174186E-2
7	6.5363250E-2	6.5453642E-2
6	6.5623756E-2	6.5711923E-2
5	6.5864780E-2	6.5950136E-2
4	6.6085498E-2	6.6165747E-2
3	6.6282977E-2	6.6351616E-2
2	6.6453549E-2	6.6492443E-2
1	6.6598840E-2	6.6604986E-2

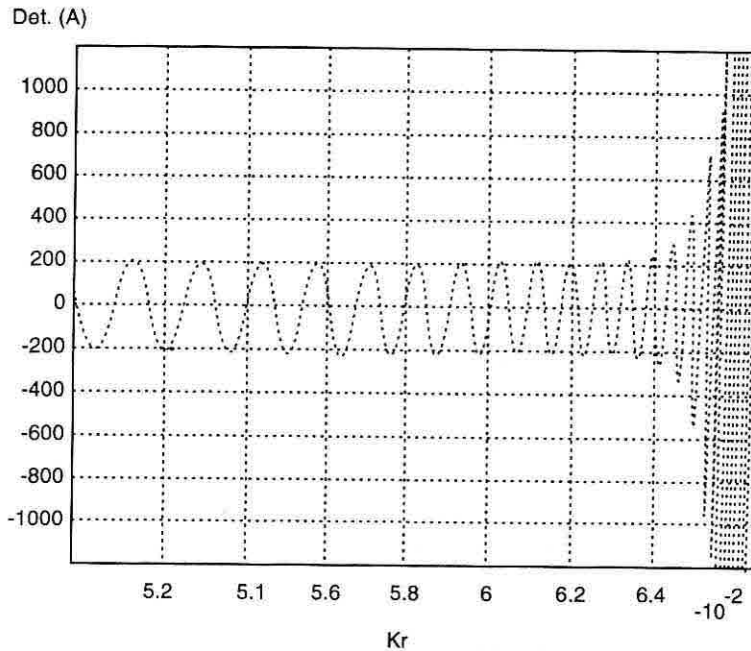


Figura 1: Comportamiento de $\text{Det } |A(k^2)|$ en función de k para el caso del fondo rígido situado a 3000 mts. La frecuencia de la señal acústica es de 100Hz.

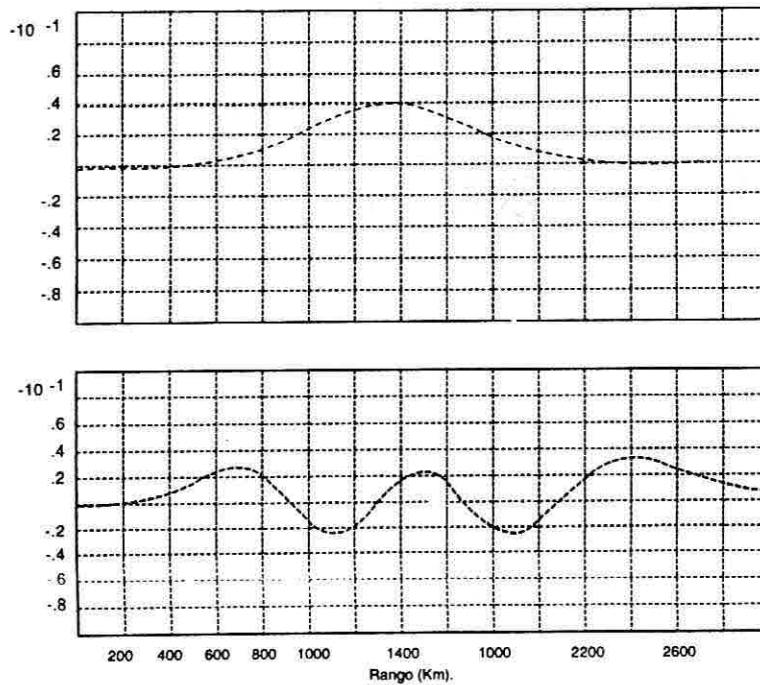


Figura 2 : funciones propias de los modos 1 y 5 para el caso de un fondo rígido con los valores anotados en la Figura anterior.

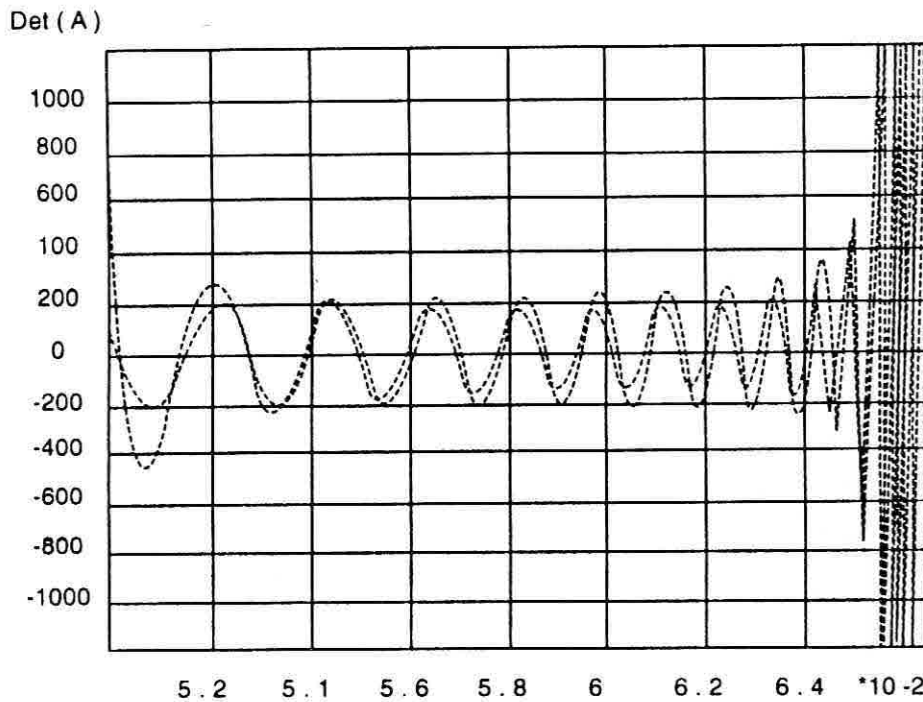


Figura 3: Comportamiento de $\text{Det } |A(k^2)|$ en función de k para el caso del fondo no-rígido (línea continua) con el caso de fondo rígido (línea punteada). El valor de la profundidad es 2000 mts, la frecuencia de la señal acústica es de 100 Hz. El fondo está caracterizado por una densidad de 2 Kg/M^3 y la velocidad c_f es 2.000 m/Seg.

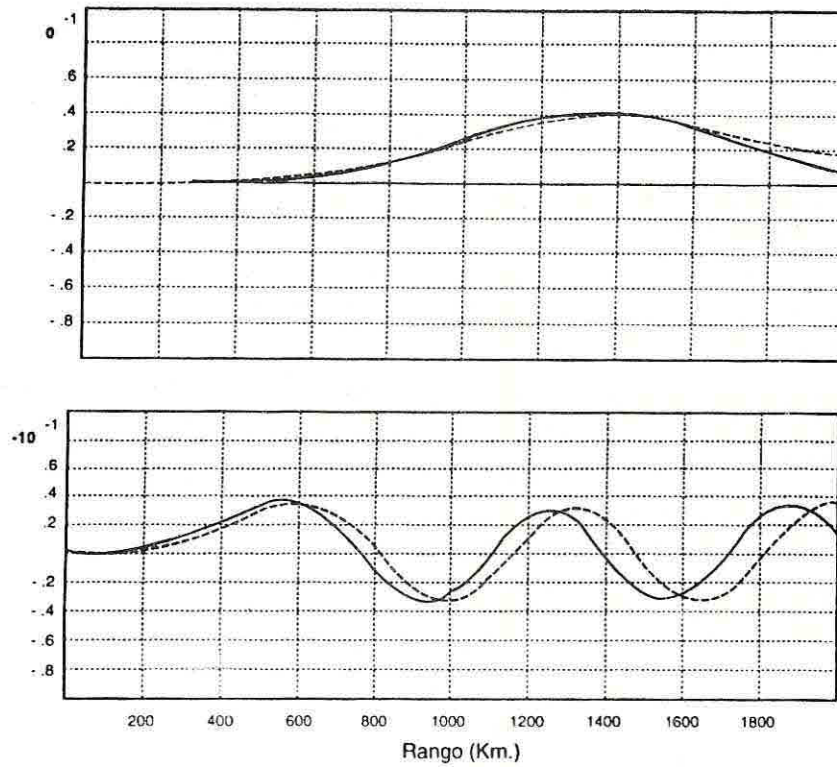


Figura 4: Funciones propias de los modos 1 y 5 para el caso de un fondo no-rígido (línea continua) y fondo rígido (línea punteada). Los valores empleados en el cálculo se indican en la figura anterior.

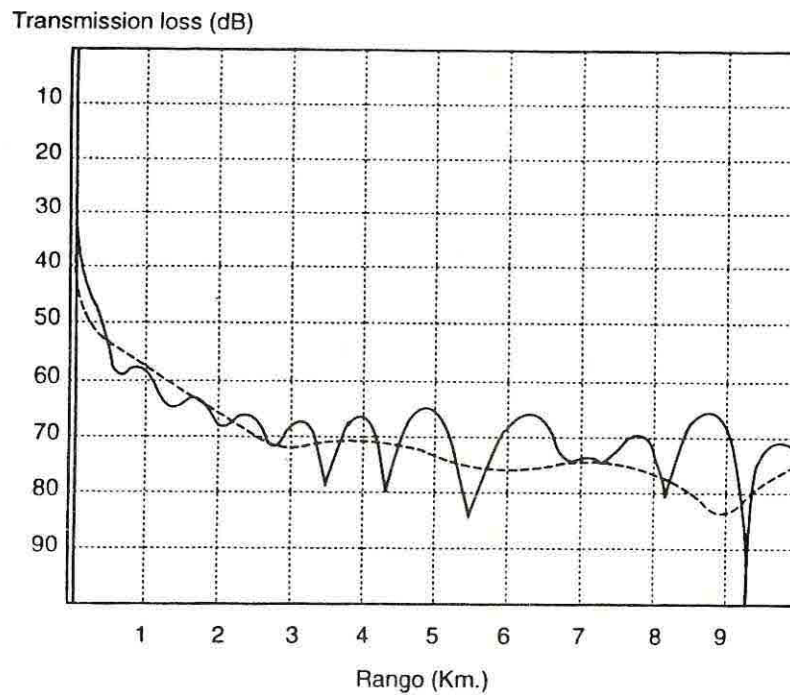


Figura 5: Pérdida por transmisión para una fuente y receptor ubicados a 50 mts. La línea continua corresponde al caso de fondo no-rígido y la línea punteada al caso de fondo rígido. Los otros valores empleados en el cálculo se hayan en el texto de la figura 3.

5. BIBLIOGRAFIA

- Estrada H. Programa para la predicción acústica submarina propas 1.0" C.I.O.H. 1995.
- Jensen F.B. Numerical models in underwater acoustics. L.B. Felsen De. Dordrecht The Netherlands Nijhoff, pg 295.1954.
- Méndez N. Solución de la ecuación de Helmholtz por el método de modos normales para acústica lineal submarina. Tesls de grado Departamento de Física Universidad Nacional. 1995.
- Miller J.F. Modal acoustic transmission loss. A transmission loss computer program using a normal mode of acoustic field in ocean. Naval research lab. Washington DC Rep 8429. 1980.
- Munk W. H. SOUND CHANNEL IN AN EXPONENTIAL STRATIFIED OCEAN WITH APPLICATIONS TO SOFAR. JASA 55, 220, 1974.
- Porter, M; Reiss, E. A METHOD FOR BOTTON INTERACTING OCEAN ACOUSTIC NORMAL MODES, JASA 77, 1760, 1985.
- Press, W. Numerical recipes Cambridge Unlversity Press 1985.
- Stakgold, Y. GREENS'S FUNCTIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEM" Wilwy New York. 1979.
- Urlick, R. J. Principles of underwater sound 3rd De McGraw-Hill New York 1983
- Wilkinson, A. THE ALGEBRAIC EIGEN VALUE PROBLEM Oxford University Press. 1965.

H. Estrada, Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Dpto de Física. Tel. 913681496.